T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ BİHİPERBOLİK SAYILAR VE POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan
Sinem ERGEZER

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2024
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ BİHİPERBOLİK SAYILAR VE POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan
Sinem ERGEZER

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2024

Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME danışmanlığında **Sinem ERGEZER** tarafından hazırlanan **“Bazı Genelleştirilmiş Bihiperbolik Sayılar ve Polinomların Özellikleri”** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

31/01/2024

JÜRİ

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Merve KARA …………………………

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME …………………………

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hayrullah ÖZİMAMOĞLU …………………………

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun …. / …. /…… tarih ve ………… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…. /…. /….

Prof. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sinem ERGEZER

TEŞEKKÜR

Bu tezin çalışma aşamasında bana yol gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen, beni yüreklendiren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım sayın danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME ’ye,

Lisans eğitimim boyunca bilgileriyle ışık tutan Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölüm hocalarıma,

Hayatımın her anında her şekilde yanımda olup desteklerini esirgemeyen değerli annem, babam ve abime,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü’ne, Fen Edebiyat Fakültesi Dekanlığı’na ve Matematik Bölüm Başkanlığı’na sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ BİHİPERBOLİK SAYILAR VE POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Sinem ERGEZER

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, tez konusu ile alakalı detaylı bir literatür taraması yapılmış olup konu ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, öncelikle bihiperbolik Padovan, Pell-Padovan, Jacobsthal-Padovan ve Padovan$-p$ sayılarının tanımları verilmiştir. Ayrıca bu sayılara ait dizilerin Binet benzeri formülleri, üreteç fonksiyonları ve bazı özel toplamları da bu bölümde sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomları hakkında bilgilere yer verilmiştir. Bunun yanı sıra, bu bölümde tanımlanan polinomların üreteç fonksiyonları ve birbirleri ile olan ilişkileri de elde edilmiştir.

Dördüncü bölüm ise tezde yapılan çalışmaların literatüre katkısı ile ilgili sonuç bölümünden oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler:* *Padovan sayısı, Pell-Padovan sayısı, Jacobsthal-Padovan sayısı, Padovan$-p$ sayısı, İki değişkenli Fibonacci$-p$ polinomları, İki değişkenli Lucas$-p$ polinomları, Üreteç fonksiyonu, Bihiperbolik sayılar.

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

Sayfa Adedi: 43

PROPERTIES OF SOME GENERALIZED BIHYPERBOLIC NUMBERS AND POLYNOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Sinem ERGEZER

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, a detailed literature review related to the thesis topic has been conducted, including fundamental definitions and theorems related to the subject.

The second chapter, the definitions of bihyperbolic Padovan, Pell-Padovan, Jacobsthal-Padovan and Padovan$-p$ numbers are given. In addition, Binet-like formulas, generator functions and some special sums of the sequences of these numbers are also presented in this section.

In the third chapter, information about bivariate bihyperbolic Fibonacci$-p$ and Lucas$-p$ polynomials is given. In addition, the generating functions of the polynomials defined in this section and their relationships with each other were also obtained.

In the fourth chapter, the conclusion regarding the contribution of the studies carried out in the thesis to the literature is given.

***Keywords:* *Padovan numbers, Pell-Padovan numbers, Jacobsthal-Padovan numbers, Padovan$-\mathfrak{p}$ numbers, Bivariate Fibonacci$-\mathfrak{p}$ polynomials, Bivariate Lucas$-\mathfrak{p}$ polynomials, Generating functions, Bihyperbolic numbers*.**

Thesis supervisor: Assist. Prof. Dr. Sure KÖME

Page Number: 43

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{H}$	Hiperbolik sayılar kümesi
$\boldsymbol{H_2}$	Bihiperbolik sayılar kümesi
$\{\boldsymbol{W_n}\}$	Genelleştirilmiş Tribonacci dizisi
$\{\boldsymbol{P_n}\}$	Padovan sayı dizisi
$\{\boldsymbol{R_n}\}$	Pell-Padovan dizisi
$\{\boldsymbol{V_n}\}$	Jacobsthal-Padovan dizisi
$\{\boldsymbol{Pap(n+p+2)}\}$	Padovan$-p$ dizisi
$\{\boldsymbol{F_{p,n}(x,y)}\}$	İki değişkenli Fibonacci$-p$ polinom dizisi
$\{\boldsymbol{L_{p,n}(x,y)}\}$	İki değişkenli Lucas$-p$ polinom dizisi
$\{\overline{\boldsymbol{BP_n}}\}$	Bihiperbolik Padovan dizisi
$\{\overline{\boldsymbol{BR_n}}\}$	Bihiperbolik Pell-Padovan dizisi
$\{\overline{\boldsymbol{BV_n}}\}$	Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan dizisi
$\{\overline{\boldsymbol{BPap}}\boldsymbol{(n+p+2)}\}$	Bihiperbolik Padovan$-p$ dizisi
$\{\overline{\boldsymbol{BF_{p,n}}}\boldsymbol{(x,y)}\}$	Bihiperbolik iki değişkenli Fibonacci$-p$ polinom dizisi
$\{\overline{\boldsymbol{BL_{p,n}}}\boldsymbol{(x,y)}\}$	Bihiperbolik iki değişkenli Lucas$-p$ polinom dizisi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Literatürde karmaşık sayıların daha yüksek boyutlara yönelik birçok genellemesi bulunmaktadır. Uygulama açısından bakıldığında dört boyuta yapılan genelleme çok ilginçtir. Özellikle kuaterniyonlar, fizik ve mühendislikte bilgisayarlı görme ve elektromanyetik alan denklemleri açısından önemli bir yere sahiptir. Ancak kuaterniyonlar değişmeli olmayan bir cebirdir ve bazı uygulamalar için bazı sınırlamalara sahip olabilirler. Kuaterniyonlar ilk olarak William Rowan Hamilton tarafından keşfedilmiştir [1]. Karmaşık sayıların aksine kuaterniyonlar reel olan dört bileşenden oluşur. Bir q kuaterniyonu, q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılarının bir kombinasyonu olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3.$$

Burada $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ ve $\boldsymbol{k}$ vektörleri, $\mathbb{R}^3$'te standart ortonormal baz vektörleridir. Ayrıca aşağıdaki çarpım kurallarını sağlamaktadırlar,

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1,\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k},\ \ \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i},\ \ \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}.$$

1848 yılında, Cockle tarafından $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve

$$\boldsymbol{i}^2 = -1,\ \boldsymbol{j}^2 = 1,\ \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{-1},\ \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k},$$

olmak üzere $t = a + \boldsymbol{i}b + \boldsymbol{j}c + \boldsymbol{k}d$ şeklinde verilen Tessarine sayıları tanıtılmıştır [2]. Tessarine sayıları ile kuaterniyonlar arasındaki fark değişme özelliğidir. Çünkü kuaterniyonlar değişmeli değilken, Tessarine sayıları değişmelidir. Cockle'ın Tessarinler üzerine yaptığı çalışmadan sonra, Segre [3], Hamilton ve Clifford'un bulduğu kuaterniyonları reel katsayılı karmaşık sayılarla değiştirerek bikompleks sayılar elde etmiş ve Tessarine sayılarıyla izomorfik bir cebir oluşturmuştur. Bikompleks sayıların keşfiyle birlikte elde edilen yeni sayılar ise hiperbolik sayılar konusunda ortaya bir fikir atmıştır.

Matematik ve teorik fiziğin farklı alanlarında uygulamaları olan hiperbolik sayılar, reel sayılarda tanımlı olmayan ve karesi 1'e eşit olan bir sayının kümeye katılmasıyla üretilen kümeye denir. Hiperbolik sayılar literatürde iyi çalışılmaktadır ve özel görelilik teorisinin iki boyutlu uzay-zaman düzenini tanımlayan en değerli matematik dillerinden biri olarak kabul edilmektedir. İlk olarak 1848 yılında J. Cockle tarafından karmaşık katsayılara sahip hiperbolik sayılar tanıtılmıştır [2, 4-6]. Hiperbolik sayılar matematik literatüründe Lorentz sayıları, çift sayılar, dubleks sayılar, bölünmüş karmaşık sayılar ve perplex sayılar gibi farklı isimlerle anılmaktadır [7, 8]. İki boyutlu bir sayı sistemi olan hiperbolik sayı, $z = x + hy$ şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $x, y \in \mathbb{R}$ ve $h^2 = 1$ ve $h \neq \mp 1$ dir. Böylece, hiperbolik sayılar kümesi,

$$H = \{z: z = x + hy,\ x, y \in \mathbb{R},\ h^2 = 1,\ h \notin \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır [8]. Herhangi iki hiperbolik sayı z_1 ve z_2'nin toplanması, çıkarılması ve çarpılması aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + hy_1) \pm (x_2 + hy_2) = (x_1 \pm x_2) + h(y_1 \pm y_2)$$
$$z_1 \times z_2 = (x_1 + hy_1) \times (x_2 + hy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + h(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Öte yandan, iki hiperbolik sayının bölümü,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+hy_1}{x_2+hy_2} = \frac{(x_1+hy_1)(x_2-hy_2)}{(x_2+hy_2)(x_2-hy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2-y_2^2} + h\frac{x_1y_2+y_1x_2}{x_2^2-y_2^2}$$

şeklinde elde edilir. $z = x + hy$ 'nin hiperbolik eşleniği ise $\bar{z} = x - hy$ şeklindedir [8].

Bihiperbolik sayılar, hiperbolik sayı çiftlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilen sayılardır. Bihiperbolik sayılar [9], kanonik hiperbolik kuaterniyonlar [10] veya hiperbolik dörtlü karmaşık sayılar [11] olarak adlandırılabilir. Bihiperbolik sayılar kümesi,

$$H_2 = \{x = x_0 + j_1x_1 + j_2x_2 + j_3x_3: x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, j_1, j_2, j_3 \notin \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$j_1^2 = j_2^2 = j_3^2 = 1,\ j_1 j_2 = j_2 j_1 = j_3,\ \ j_1 j_3 = j_3 j_1 = j_2,\ j_2 j_3 = j_3 j_2 = j_1$$

çarpım kuralları geçerlidir. Bihiperbolik sayıların çarpımı cebirsel ifadelerin çarpımı gibi yapılabilir. H_2 üzerindeki toplama ve çarpma işlemleri değişmeli ve birleşmelidir. Çarpma, toplama işlemi üzerine dağılır. $(H_2, +, .)$ değişmeli bir halkadır [9, 12, 13].

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu tez çalışmasındaki amaç öncelikle literatürde var olan Genelleştirilmiş Tribonacci dizisinin özel hallerinden de elde edilebilen Padovan, Pell-Padovan, Jacobsthal-Padovan sayılarını ve Padovan$-p$ sayılarını kullanarak bu sayıların bihiperbolik sayılar ile ilişkisini ele almaktır. Ayrıca, iki değişkenli Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomlarının da bihiperbolik sayılar ile ilişkisi tez çalışmasında araştırılan konulardandır. Bu nedenle öncelikle bihiperbolik Padovan, Pell-Padovan, Jacobsthal-Padovan ve Padovan$-p$ sayılarının tanımları elde edilerek bu sayıların pek çok özelliği ele alınacaktır. Ayrıca iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomlarının tanımları yapılıp bu tanımlar yardımıyla yeni tanımlanan polinomların üreteç fonksiyonu ve birbirleri ile olan ilişkileri de incelenecektir.

1.2. Kaynak Araştırması

Literatürde bu zamana kadar sayı dizileri, Fibonacci ve Lucas polinomları, hiperbolik sayılar, bihiperbolik sayılar vb. hakkında birçok uygulama ve genellemeye yer verilmiştir. Bu bölümde tezin oluşum aşamasında yararlanılan çalışmalar hakkında bilgiler verilecektir.

Yalavigi (1971), "A Note on 'Another Generalized Fibonacci Sequence'" isimli çalışmasında, genelleştirilmiş Fibonacci dizilerinden bahsetmiştir. Ayrıca bu çalışmada Tribonacci dizilerini de ele almıştır [14].

Yalavigi (1972), "Properties of Tribonacci numbers" isimli çalışmasında, Tribonacci sayılarının pek çok özelliği üzerinde durmuştur [15].

Shannon ve Horadam (1972), “Some properties of third-order recurrence relations” isimli çalışmalarında, çeşitli teknikler kullanarak üçüncü dereceden rekürans bağıntıları hakkında bazı sonuçlar elde etmişlerdir [16].

Scott ve çalışma arkadaşları (1977), “The Tribonacci Sequence” isimli çalışmalarında, Tribonacci dizisinin tanımını sunmuşlardır. Ayrıca bu dizilerin üreteç fonksiyonunun yanı sıra bazı özelliklerini de bu çalışma da elde etmişlerdir [17].

Shannon (1977), “Tribonacci numbers and Pascal’s pyramid” isimli çalışmasında, literatürde tartışılan Tribonacci sayıları için bir ifade elde etmiştir. Bu ifade de Pascal piramidi olarak adlandırılan ifade ile Tribonacci sayıları arasında bir ilişki kurmuştur [18].

Spickerman (1982), “Binet’s formula for the Tribonacci sequence” isimli çalışmasında, Tribonacci dizileri için Binet formülünü geliştirmiştir [19].

Bruce (1984), “A modified Tribonacci sequence” isimli çalışmasında, literatürde yer alan Tribonacci dizisi için rekürans bağıntısının oldukça hantal olduğundan ve bu nedenle pek çok özelliğinin kolaylıkla elde edilemeyeceğinden Fibonacci dizisine benzer bir geliştirmenin yapılabilmesi amacıyla bir değişiklik önermiştir [20].

Pethe (1988), “Some identities for Tribonacci sequences” isimli çalışmasında, Fibonacci, Lucas ve Pell dizilerinin benzer genelleştirilmiş özdeşliklerinin, Tribonacci sayıları için de elde edilebilmesi amacıyla, Gauss tam sayılarındaki karmaşık Tribonacci sayılarını tanımlamıştır [21].

Shannon ve çalışma arkadaşları (2006), “Properties of Cordonnier, Perrin and van der Laan numbers” isimli çalışmalarında, Fibonacci ve Lucas'ın daha iyi bilinen ikinci dereceden dizilerine benzer bazı özelliklere sahip olan belirli üçüncü dereceden lineer dizilerin bazı özelliklerini araştırmayı amaçlamışlardır [22].

Stakhov ve Rozin (2007), “The "golden" hyperbolic models of Universe” isimli çalışmalarında, hiperbolik uzayın yeni matematiksel modellerinin bir incelemesini sunmuşlardır. Ayrıca yazarlar, bu modellerden en önemlileri olan hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarını da tanıtmışlardır [23].

Tuglu ve çalışma arkadaşları (2011), “Bivariate fibonacci like p−polynomials” isimli çalışmalarında, iki değişkenli Fibonacci ve Lucas p−polinomlarını incelemişlerdir. Daha sonra iki değişkenli Fibonacci ve Lucas p−polinomlarının bazı özelliklerini de bu makalede sunmuşlardır [24].

Choi (2013), “Modular Tribonacci numbers by matrix method” isimli çalışmasında, Tribonacci sayılarını ele almışlardır. Pascal üçgeninin benzeri olan bir Tribonacci üçgeni bularak, herhangi bir Tribonacci sayısını matris yöntemiyle hesaplamak için etkili bir yöntem araştırmışlar ve bu amaçla modüler Tribonacci sayısını ele alarak dizinin periyotlarını bulmuşlardır [25].

Yılmaz ve Taşkara (2014), “Tribonacci and Tribonacci-Lucas numbers via the determinants of special matrices” isimli çalışmalarında, özel matrislerin determinantlarını kullanarak Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayılarını elde etmişlerdir [26].

Yılmaz (2015), “Padovan ve Perrin sayılarının matris temsilleri” isimli tez çalışmasında, Padovan ve Perrin sayı dizilerinin başlangıç şartları tipinde matrislerini alarak bu matris dizilerinin çeşitli özelliklerini incelemiştir. Bunların yanında bu matris dizilerinin binomial dönüşümleri üzerine çalışmıştır [27].

Deveci ve Karaduman (2017), “On the Padovan$-p$ numbers” isimli çalışmalarında, Padovan p $-$sayılarını tanımlamışlar ve daha sonra bunların Binet formülü, üreteç fonksiyonu, üstel gösterimi ve bazı toplamları gibi çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir [28].

Alp ve çalışma arkadaşları (2017), “Two-periodic ternary recurrences and their Binet-formula” isimli çalışmalarında, iki periyotlu üçlü doğrusal rekürans kavramını tanımlamışlardır. Ayrıca altıncı dereceden karşılık gelen rekürans bağıntısını elde etmek için Cooper'ın yaklaşımından faydalanmışlardır [29].

Güngör ve Azak (2017), “Investigation of Dual-Complex Fibonacci, Dual-Complex Lucas Numbers and Their Properties” isimli çalışmalarında, ikili-karmaşık Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlamışlardır. Bu sayıların üreteç fonksiyonlarını ve Binet formüllerini vermişlerdir [30].

Taşçı (2018), “Padovan and Pell-Padovan Quaternions” isimli çalışmasında, Padovan ve Pell-Padovan kuaterniyonlarını tanımlamıştır. Binet benzeri formülleri, üreteç fonksiyonları ve toplam formüllerini vermiştir. Ayrıca Padovan ve Pell-Padovan kuaterniyonlarının matris gösterimlerini sunmuştur [31].

Soykan (2020) “Summing formulas for generalized Tribonacci numbers” isimli çalışmasında, genelleştirilmiş Tribonacci sayıları için toplam formüllerinin kapalı formlarını sunmuştur. Daha sonra, mevcut sonuçların özel durumları olarak Tribonacci, Tribonacci-Lucas, Padovan, Perrin, Narayana ve diğer bazı üçüncü dereceden doğrusal yineleme dizilerinin toplam formüllerini vermiştir [32].

Soykan (2020), “A study on generalized Jacobsthal-Padovan numbers” isimli çalışmasında, genelleştirilmiş Jacobsthal-Padovan sayılarını ve dört özel durumu, yani Jacobsthal-Padovan, Jacobsthal-Perrin, düzeltilmiş Jacobsthal-Padovan ve değiştirilmiş Jacobsthal-Padovan dizilerini incelemiştir. Bu diziler için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, Simson ve toplam formüllerinden bahsetmiştir [33].

Bród ve çalışma arkadaşları (2021), “On some combinatorial properties of bihyperbolic numbers of the Fibonacci type” isimli çalışmalarında, bihiperbolik Fibonacci, Jacobsthal ve Pell sayılarının bazı özelliklerini ve bunların yanında Binet formülü, Catalan, Cassini ve d’Ocagne özdeşliklerini vermişlerdir. Bu sayılar için üreteç fonksiyonlarını ve toplam formüllerini de elde etmişlerdir [34].

1.3. Temel Kavramlar

Bu bölümde tez konusunu daha detaylı bir şekilde anlayabilmek için gereken ve tezin diğer bölümlerinde karşımıza çıkabilecek temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

İlk olarak genelleştirilmiş Tribonacci dizilerinden bahsedilecektir.

Tanım 1.3.1: Genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\{W_n(W_0, W_1, W_2; r, s, t)\}_{n\geq 0}$ (ya da kısaca $\{W_n\}_{n\geq 0}$) aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$W_n = rW_{n-1} + sW_{n-2} + tW_{n-3}\,, \quad n \geq 3. \tag{1.2}$$

Burada W_0, W_1, W_2 başlangıç şartları ve keyfi karmaşık sayılardır. Ayrıca r, s, t reel sayılardır. Genelleştirilmiş Tribonacci dizileri pek çok yazar tarafından çalışılmıştır [14-21,25,26]. Tablo 1.1'de genelleştirilmiş Tribonacci dizilerinin bazı özel durumları yer almaktadır.

Tablo 1.1. Genelleştirilmiş Tribonacci dizilerinin bazı özel durumları

Diziler	**Gösterimler**	**OEIS[35]**
Fibonacci	$\{F_n\} = \{W_n(0,1,1; 1,1,0)\}$	A000045
Lucas	$\{L_n\} = \{W_n(2,1,3; 1,1,0)\}$	A000032
Tribonacci	$\{T_n\} = \{W_n(0,0,1; 1,1,1)\}$	A000073
Tribonacci-Lucas	$\{K_n\} = \{W_n(3,1,3; 1,1,1)\}$	A001644
Padovan	$\{P_n\} = \{W_n(1,1,1; 0,1,1)\}$	A000931
Pell-Padovan	$\{R_n\} = \{W_n(1,1,1; 0,2,1)\}$	A066983
Jacobsthal-Padovan	$\{Q_n\} = \{W_n(1,1,1; 0,1,2)\}$	A159284

Tablo 1.1.'den de görüldüğü gibi genelleştirilmiş Tribonacci dizisinde $r = 0, s = t = 1, W_0 = W_1 = W_2 = 1$ olacak şekilde seçilirse Padovan dizisi elde edilir.

Tanım 1.3.2: $n \geq 3$ için Padovan dizisi, $\{P_n\}$, aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}. \tag{1.3}$$

Padovan dizisi $\{P_n\}$'nin başlangıç şartları ise $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ şeklindedir. Burada P_n, n. Padovan sayısıdır [27].

Teorem 1.3.1 (Binet Benzeri Formülü): $n \in \mathbb{N}$ için, r_1, r_2 ve r_3, $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$a = \frac{(r_2-1)(r_3-1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}, b = \frac{(r_1-1)(r_3-1)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}, c = \frac{(r_1-1)(r_2-1)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$$

olmak üzere, Padovan dizisi, $\{P_n\}$, için Binet benzeri formül

$$P_n = a{r_1}^n + b{r_2}^n + c{r_3}^n \tag{1.4}$$

olarak verilir [27].

Teorem 1.3.2 (Üreteç Fonksiyonu): Padovan dizisi, $\{P_n\}$, için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{1+x}{1-x^2-x^3} \tag{1.5}$$

şeklinde verilir [27].

Teorem 1.3.3: Padovan sayıları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır [32].

i. $\sum_{k=0}^{n} P_k = P_{n+2} + P_{n+3} - 2,$ (1.6)

ii. $\sum_{k=0}^{n} P_{2k} = P_{2n+3} - 1,$ (1.7)

iii. $\sum_{k=0}^{n} P_{2k+1} = P_{2n+4} - 1,$ (1.8)

Tablo 1.1.'den de görüldüğü gibi genelleştirilmiş Tribonacci dizisinde $r = 0, s = 2, t = 1, W_0 = W_1 = W_2 = 1$ olacak şekilde seçilirse Pell-Padovan dizisi elde edilir.

Tanım 1.3.3: $n \geq 3$ için Pell-Padovan dizisi, $\{R_n\}$, aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$R_n = 2R_{n-2} + R_{n-3} \tag{1.9}$$

Pell-Padovan dizisi $\{R_n\}$'nin başlangıç şartları ise $R_0 = R_1 = R_2 = 1$ şeklindedir. Burada R_n, n. Pell-Padovan sayısıdır [31].

Teorem 1.3.4 (Binet Benzeri Formülü): $n \in \mathbb{N}$ için, $s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, s_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $s_3 = -1$, $x^3 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\bar{a} = \frac{(s_2-1)(s_3-1)}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)}, \ \bar{b} = \frac{(s_1-1)(s_3-1)}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)}, \ \bar{c} = \frac{(s_1-1)(s_2-1)}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)}$$

olmak üzere, Pell-Padovan dizisi, $\{R_n\}$, için Binet benzeri formül

$$R_n = \bar{a}{s_1}^n + \bar{b}{s_2}^n + \bar{c}{s_3}^n \tag{1.10}$$

olarak verilir [31].

Teorem 1.3.5 (Üreteç Fonksiyonu): Pell-Padovan dizisi, $\{R_n\}$, için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n = \frac{1+x-x^2}{1-2x^2-x^3} \tag{1.11}$$

şeklinde verilir [31].

Teorem 1.3.6: Pell-Padovan sayıları için aşağıdaki eşitlikleri sağlanır [31].

i. $\sum_{k=0}^{n} R_k = \frac{1}{2}(R_n + R_{n+1} + R_{n+2} - 1),$ (1.12)

ii. $\sum_{k=0}^{n} R_{2k} = R_{2n+1} - n,$ (1.13)

iii. $\sum_{k=0}^{n} R_{2k+1} = R_{2n+1} + R_{2n} + (n-1),$ (1.14)

Tablo 1.1.'den de görüldüğü gibi genelleştirilmiş Tribonacci dizisinde $r = 0, s = 1, t = 2, W_0 = W_1 = W_2 = 1$ olacak şekilde seçilirse Jacobsthal-Padovan dizisi elde edilir.

Tanım 1.3.4: $n \geq 0$ için Jacobsthal-Padovan dizisi, $\{V_n\}$, aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$V_n = V_{n-2} + 2V_{n-3} \tag{1.15}$$

Jacobsthall-Padovan dizisi $\{V_n\}$'nin başlangıç şartları ise $V_0 = 1\,, V_1 = 1\,, V_2 = 1$ şeklindedir. Burada V_n, n. Jacobsthall-Padovan sayısıdır [33].

Teorem 1.3.7 (Binet Benzeri Formülü): $n \in \mathbb{N}$ için, t_1, t_2 ve t_3, $x^3 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\underline{a} = \frac{(t_2-1)(t_3-1)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\,, \underline{b} = \frac{(t_1-1)(t_3-1)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\,, \underline{c} = \frac{(t_1-1)(t_2-1)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

olmak üzere, Jacobsthal-Padovan dizisi, $\{V_n\}$, için Binet benzeri formül

$$V_n = \underline{a}{t_1}^n + \underline{b}{t_2}^n + \underline{c}{t_3}^n \tag{1.16}$$

olarak verilir [33].

Teorem 1.3.8 (Üreteç Fonksiyonu): Jacobsthal-Padovan dizisi, $\{V_n\}$, için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n = \frac{1+x}{1-x^2-2x^3} \tag{1.17}$$

şeklinde verilir [33].

Teorem 1.3.9: Jacobsthal-Padovan sayıları için aşağıdaki eşitlikleri sağlanır [32].

i. $\sum_{k=0}^{n} V_k = \frac{1}{2}(V_{n+3} + V_{n+2} - 2)$, (1.18)

ii. $\sum_{k=0}^{n} V_{2k} = \frac{1}{2}(V_{2n+1} + 2V_{2n} - 1)$, (1.19)

iii. $\sum_{k=0}^{n} V_{2k+1} = \frac{1}{2}(V_{2n+2} + 2V_{2n+1} - 1)$, (1.20)

Tanım 1.3.5: $n \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}^{+}$ve $p \geq 2$ için Padovan$-p$ dizisi, $\{Pap(n+p+2)\}$, aşağıda verilen lineer rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

$$Pap(n+p+2) = Pap(n+p) + Pap(n). \tag{1.21}$$

Padovan$-p$ dizisi $\{Pap(n+p+2)\}$‘nin başlangıç şartları ise $Pap(1) = Pap(2) = \cdots = Pap(p) = 0$, $Pap(p+1) = 1$ ve $Pap(p+2) = 0$ şeklindedir [28].

(1.21)'de $p = 2$ alınırsa, $n \geq 1$ için $Pa2(2n+1) = F_n$ elde edilir.

Teorem 1.3.10 (Üreteç Fonksiyonu): $0 \leq x^2 + x^{p+2} < 1$ için Padovan$-p$ dizisi $\{Pap(n+p+2)\}$'nin üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} Pap(n+p+1)x^n = \frac{1}{1-x^2-x^{p+2}} \tag{1.22}$$

olarak elde edilir [28].

Teorem 1.3.11: $p+1$'den $p+n$'ye kadar Padovan$-p$ sayılarının toplamları S_n ile gösterilsin. O halde

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Pap(p+i) = \sum_{i=1}^{p+1} Pap(n+p+2-i) - 1 \tag{1.23}$$

olur [28].

Tanım 1.3.6: $p \geq 1$ tamsayı olsun. $n > p$ için, genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci$-p$ polinom dizisi, $\{F_{p,n}(x,y)\}$, için rekürans bağıntısı,

$$F_{p,n}(x,y) = xF_{p,n-1}(x,y) + yF_{p,n-p-1}(x,y), \tag{1.24}$$

şeklindedir. Genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci$-p$ polinom dizisi $\{F_{p,n}(x,y)\}$'nin başlangıç şartları ise $F_{p,0}(x,y) = 0$ ve $n = 1,2,\ldots,p$ için $F_{p,n}(x,y) = x^{n-1}$ şeklindedir [24].

Teorem 1.3.12 (Üreteç Fonksiyonu): İki değişkenli Fibonacci$-p$ polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{p,n}(x,y)z^n = \frac{z}{1-xz-yz^{p+1}} \tag{1.25}$$

şeklindedir [24].

Tanım 1.3.7: $p \geq 1$ tamsayı olsun. $n > p$ için, genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas$-p$ polinom dizisi, $\{L_{p,n}(x,y)\}$, için rekürans bağıntısı,

$$L_{p,n}(x,y) = xL_{p,n-1}(x,y) + yL_{p,n-p-1}(x,y), \tag{1.26}$$

şeklindedir. Genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas$-p$ polinom dizisi $\{L_{p,n}(x,y)\}$'nin başlangıç şartları ise $L_{p,0}(x,y) = p + 1$ ve $n = 1,2, \dots, p$ için $L_{p,n}(x,y) = x^n$ şeklindedir [24].

Teorem 1.3.13 (Üreteç Fonksiyonu): İki değişkenli Lucas$-p$ polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{p,n}(x,y)z^n = \frac{1+p(1-xz)}{1-xz-yz^{p+1}} \tag{1.27}$$

şeklindedir [24].

Teorem 1.3.14: $F_{p,n}(x,y)$ ve $L_{p,n}(x,y)$, sırasıyla iki değişkenli Fibonacci$-p$ ve iki değişkenli Lucas$-p$ polinomları için,

$$L_{p,n}(x,y) = F_{p,n+1}(x,y) + py\, F_{p,n-p}(x,y) \tag{1.28}$$

bağıntısı geçerlidir [24].

Teorem 1.3.15: $F_{p,n}(x,y)$ ve $L_{p,n}(x,y)$, sırasıyla iki değişkenli Fibonacci$-p$ ve iki değişkenli Lucas$-p$ polinomları için,

$$\frac{\partial\, L_{p,n}(x,y)}{\partial x} = n\, F_{p,n}(x,y) \tag{1.29}$$

ve

$$\frac{\partial\, L_{p,n}(x,y)}{\partial y} = n\, F_{p,n-p}(x,y) \tag{1.30}$$

bağıntıları geçerlidir [24].

Teorem 1.3.16: İki değişkenli Fibonacci$-p$ ve iki değişkenli Lucas$-p$ polinomlarının toplamları,

$$\sum_{n=0}^{k} F_{p,n}(x,y) = \frac{1}{(x+y-1)}\left(F_{p,k+p+1}(x,y) - F_{p,p}(x,y)\right) + \frac{(1-x)}{(x+y-1)}\left(\sum_{n=0}^{p-1}\left(F_{p,n+k+1}(x,y) - F_{p,n}(x,y)\right)\right) \tag{1.31}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{k} L_{p,n}(x,y) = \frac{1}{(x+y-1)}\left(L_{p,k+p+1}(x,y) - L_{p,p}(x,y)\right) + \frac{(1-x)}{(x+y-1)}\left(\sum_{n=0}^{p-1}\left(L_{p,n+k+1}(x,y) - L_{p,n}(x,y)\right)\right) \tag{1.32}$$

şeklindedir [24].

BÖLÜM 2

BİHİPERBOLİK PADOVAN, PELL-PADOVAN, JACOBSTHAL-PADOVAN VE PADOVAN$-p$ SAYILARI

Bu bölümde Bihiperbolik Padovan, Pell-Padovan, Jacobsthal-Padovan ve Padovan$-p$ sayıları hakkında bilgi verilecektir. Ayrıca bu sayılara ait dizilerin Binet benzeri formülleri, üreteç fonksiyonları ve bazı özel toplamları sunulacaktır.

İlk olarak bihiperbolik Padovan sayıları hakkında bilgi verilecektir.

2.1. Bihiperbolik Padovan Sayıları

Bu bölümde ilk bölümde tanımı ve özellikleri verilen Padovan sayıları kullanılarak elde edilen Bihiperbolik Padovan sayıları hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 2.1.1: $n \in \mathbb{N}$ için, Bihiperbolik Padovan dizileri, $\{\overline{BP_n}\}$, şu şekilde tanımlanır,

$$\overline{BP_n} = P_n + j_1 P_{n+1} + j_2 P_{n+2} + j_3 P_{n+3} \tag{2.1}$$

burada $\overline{BP_n}$, n'inci Bihiperbolik Padovan sayısı ve P_n ise (1.3)'deki Padovan sayısıdır. $n \geq 3$ olmak üzere Bihiperbolik Padovan dizileri $\{\overline{BP_n}\}$ için,

$$\overline{BP_n} = \overline{BP_{n-2}} + \overline{BP_{n-3}}, \tag{2.2}$$

rekürans bağıntısının sağlandığı açıktır. Bu $\{\overline{BP_n}\}$ dizisinin başlangıç şartları, $\overline{BP_0} = 1 + j_1 + j_2 + 2j_3$ ve
$\overline{BP_1} = 1 + j_1 + 2j_2 + 2j_3$ olacak şekilde verilmektedir.

Teorem 2.1.1 (Binet Benzeri Formülü): $n \in \mathbb{N}$ için, r_1, r_2 ve r_3, $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$a = \frac{(r_2-1)(r_3-1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\ , b = \frac{(r_1-1)(r_3-1)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\ , c = \frac{(r_1-1)(r_2-1)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\ ,$$

$\alpha = 1 + j_1 r_1 + j_2 r_1^2 + j_3 r_1^3$, $\beta = 1 + j_1 r_2 + j_2 r_2^2 + j_3 r_2^3$, $\delta = 1 + j_1 r_3 + j_2 r_3^2 + j_3 r_3^3$

olmak üzere, Bihiperbolik Padovan dizileri $\{\overline{BP_n}\}$ için Binet benzeri formül,

$$\overline{BP_n} = a\alpha r_1^n + b\beta r_2^n + c\delta r_3^n \tag{2.3}$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak (1.4) formülünde belirtilen Padovan dizisinin Binet benzeri formülü ve (2.1) bağıntısıyla verilen Bihiperbolik Padovan dizisi $\{\overline{BP_n}\}$'nin tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\overline{BP_n} &= P_n + j_1 P_{n+1} + j_2 P_{n+2} + j_3 P_{n+3} \\ &= a{r_1}^n + b{r_2}^n + c{r_3}^n + j_1(a{r_1}^{n+1} + b{r_2}^{n+1} + c{r_3}^{n+1}) \\ &\quad + j_2(a{r_1}^{n+2} + b{r_2}^{n+2} + c{r_3}^{n+2}) + j_3(a{r_1}^{n+3} + b{r_2}^{n+3} + c{r_3}^{n+3})\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlik bazı basit işlemler yapılarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\overline{BP_n} &= a{r_1}^n(1 + j_1 r_1 + j_2 r_1^2 + j_3 r_1^3) + b{r_2}^n(1 + j_1 r_2 + j_2 r_2^2 + j_3 r_2^3) \\ &\quad + c{r_3}^n(1 + j_1 r_3 + j_2 r_3^2 + j_3 r_3^3) \\ &= a\alpha r_1^n + b\beta r_2^n + c\delta r_3^n\end{aligned}$$

olacak şekilde elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.1.2 (Üreteç Fonksiyonu): Bihiperbolik Padovan dizisi $\{\overline{BP_n}\}$ için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{BP_n} x^n = \frac{(1+j_1+j_2+2j_3)+(1+j_1+2j_2+2j_3)x+(j_1+j_2+j_3)x^2}{1-x^2-x^3} \tag{2.4}$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BP_n} x^n$$

olsun. O halde elde edilen bu $g(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{BP_n}x^n=\overline{BP_0}+\overline{BP_1}x+\overline{BP_2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\overline{BP_n}x^n$$

$$x^2g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{BP_n}x^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\overline{BP_{n-2}}x^n=\overline{BP_0}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\overline{BP_{n-2}}x^n$$

$$x^3g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{BP_n}x^{n+3}=\sum_{n=3}^{\infty}\overline{BP_{n-3}}x^n$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned}(1-x^2-x^3)g(x)&=\overline{BP_0}+\overline{BP_1}x+(\overline{BP_2}-\overline{BP_0})x^2\\&\quad+\sum_{n=3}^{\infty}(\overline{BP_n}-\overline{BP_{n-2}}-\overline{BP_{n-3}})x^n\end{aligned}$$

elde edilir. (2.2) bağıntısı ve başlangıç şartları kullanılarak,

$$g(x)=\frac{(1+j_1+j_2+2j_3)+(1+j_1+2j_2+2j_3)x+(j_1+j_2+j_3)x^2}{1-x^2-x^3}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.1.3: Bihiperbolik Padovan sayıları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $\sum_{k=0}^{n}\overline{BP_k}=\overline{BP_{n+2}}+\overline{BP_{n+3}}-(\overline{BP_1}+\overline{BP_2}),$ (2.5)

ii. $\sum_{k=0}^{n}\overline{BP_{2k}}=\overline{BP_{2n+3}}-\overline{BP_1},$ (2.6)

iii. $\sum_{k=0}^{n}\overline{BP_{2k+1}}=\overline{BP_{2n+4}}-\overline{BP_2},$ (2.7)

İspat.

(i) Öncelikle (2.1) bağıntısıyla verilen Bihiperbolik Padovan dizilerinin tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\overline{BP_k}&=\sum_{k=0}^{n}(P_k+j_1P_{k+1}+j_2P_{k+2}+j_3P_{k+3})\\&=\sum_{k=0}^{n}P_k+j_1\sum_{k=0}^{n}P_{k+1}+j_2\sum_{k=0}^{n}P_{k+2}+j_3\sum_{k=0}^{n}P_{k+3}\\&=\sum_{k=0}^{n}P_k+j_1\sum_{k=1}^{n+1}P_k+j_2\sum_{k=2}^{n+2}P_k+j_3\sum_{k=3}^{n+3}P_k\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P_k + j_1(\sum_{k=0}^{n} P_k - P_0 + P_{n+1})$$
$$+j_2(\sum_{k=0}^{n} P_k - P_0 - P_1 + P_{n+1} + P_{n+2})$$
$$+j_3(\sum_{k=0}^{n} P_k - P_0 - P_1 - P_2 + P_{n+1} + P_{n+2} + P_{n+3})$$

elde edilir. Burada Tanım 1.3.2 ‘de verilmiş olan P_0, P_1 ve P_2 başlangıç şartları ve (1.3) bağıntısı yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{BP_k} = \overline{BP_{n+2}} + \overline{BP_{n+3}} - (2 + 3j_1 + 4j_2 + 5j_3)$$

bağıntısı elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

(ii) İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 1$ için sonuç açıkça doğrudur. Hipotezin $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğu kabul edilsin. Yani,

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{BP_{2k}} = \overline{BP_{2n+3}} - \overline{BP_0} = \overline{BP_{2n+3}} - (1 + j_1 + 2j_2 + 2j_3),$$

olsun. Şimdi $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$ için hipotezin doğru olduğunu, yani,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BP_{2k}} = \overline{BP_{2n+5}} - (1 + j_1 + 2j_2 + 2j_3)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde (2.2) bağıntısından,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BP_{2k}} = \sum_{k=0}^{n} \overline{BP_{2k}} + \overline{BP_{2n+2}}$$
$$= \overline{BP_{2n+3}} - (1 + j_1 + 2j_2 + 2j_3) + \overline{BP_{2n+2}}$$
$$= \overline{BP_{2n+5}} - (1 + j_1 + 2j_2 + 2j_3)$$

elde edilir. Sonuç olarak ispat tamamlanır. ■

(iii) İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 1$ için sonuç açıkça doğrudur. $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğu kabul edilsin. Yani,

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{BP_{2k+1}} = \overline{BP_{2n+4}} - \overline{BP_2} = \overline{BP_{2n+4}} - (1 + 2j_1 + 2j_2 + 3j_3),$$

olsun. Şimdi $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğunu, yani,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BP_{2k+1}} = \overline{BP_{2n+6}} - (1 + 2j_1 + 2j_2 + 3j_3)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde (2.2) bağıntısından,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BP_{2k+1}} &= \sum_{k=0}^{n} \overline{BP_{2k+1}} + \overline{BP_{2n+3}} \\ &= \overline{BP_{2n+4}} - (1 + 2j_1 + 2j_2 + 3j_3) + \overline{BP_{2n+3}} \\ &= \overline{BP_{2n+6}} - (1 + 2j_1 + 2j_2 + 3j_3)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak ispat tamamlanır. ■

2.2. Bihiperbolik Pell-Padovan Sayıları

Bu bölümde ilk bölümde tanımı ve özellikleri verilen Pell-Padovan sayıları kullanılarak elde edilen Bihiperbolik Pell-Padovan sayıları hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 2.2.1: $n \in \mathbb{N}$ için, Bihiperbolik Pell-Padovan dizisi, $\{\overline{BR_n}\}$, şu şekilde tanımlanır,

$$\overline{BR_n} = R_n + j_1 R_{n+1} + j_2 R_{n+2} + j_3 R_{n+3} \tag{2.8}$$

burada $\overline{BR_n}$, n'inci Bihiperbolik Pell-Padovan sayısı ve R_n ise (1.9)'daki Pell-Padovan sayısıdır. $n \geq 3$ olmak üzere Bihiperbolik Pell-Padovan dizisi $\{\overline{BR_n}\}$ için

$$\overline{BR_n} = 2\overline{BR_{n-2}} + \overline{BR_{n-3}}, \tag{2.9}$$

rekürans bağıntısının sağlandığı açıktır. Bu $\{\overline{BR_n}\}$ dizisinin başlangıç şartları, $\overline{BR_0} = 1 + j_1 + j_2 + 3j_3$ ve $\overline{BR_1} = 1 + j_1 + 3j_2 + 3j_3$ olacak şekilde verilmektedir.

Teorem 2.2.1 (Binet Benzeri Formülü): $n \in \mathbb{N}$ için, $s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, s_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $s_3 = -1$, $x^3 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\bar{a} = \frac{(s_2-1)(s_3-1)}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)}, \ \bar{b} = \frac{(s_1-1)(s_3-1)}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)}, \ \bar{c} = \frac{(s_1-1)(s_2-1)}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)},$$

$$\overline{\alpha} = 1 + j_1 s_1 + j_2 s_1^2 + j_3 s_1^3, \overline{\beta} = 1 + j_1 s_2 + j_2 s_2^2 + j_3 s_2^3, \overline{\delta} = 1 + j_1 s_3 + j_2 s_3^2 + j_3 s_3^3$$

olmak üzere, Bihiperbolik Pell-Padovan dizisi $\{\overline{BR_n}\}$ için Binet benzeri formül,

$$\overline{BR_n} = \bar{a}\bar{\alpha}s_1^n + \bar{b}\bar{\beta}s_2^n + \bar{c}\bar{\delta}s_3^n \tag{2.10}$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak (1.10) formülünde belirtilen Pell-Padovan dizisinin Binet benzeri formülü ve (2.8) bağıntısıyla verilen Bihiperbolik Pell-Padovan dizisi $\{\overline{BR_n}\}$'nin tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\overline{BR_n} &= R_n + j_1R_{n+1} + j_2R_{n+2} + j_3R_{n+3}\\ &= \bar{a}s_1^n + \bar{b}{s_2}^n + \bar{c}{s_3}^n + j_1\left(\bar{a}{s_1}^{n+1} + \bar{b}{s_2}^{n+1} + \bar{c}{s_3}^{n+1}\right)\\ &\quad +j_2\left(\bar{a}{s_1}^{n+2} + \bar{b}{s_2}^{n+2} + \bar{c}{s_3}^{n+2}\right) + j_3\left(\bar{a}{s_1}^{n+3} + \bar{b}{s_2}^{n+3} + \bar{c}{s_3}^{n+3}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlik bazı basit işlemler yapılarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\overline{BR_n} &= \bar{a}{s_1}^n(1 + j_1s_1 + j_2s_1^2 + j_3s_1^3) + \bar{b}{s_2}^n(1 + j_1s_2 + j_2s_2^2 + j_3s_2^3)\\ &\quad +\bar{c}{s_3}^n(1 + j_1s_3 + j_2s_3^2 + j_3s_3^3)\\ &= \bar{a}\bar{\alpha}s_1^n + \bar{b}\bar{\beta}s_2^n + \bar{c}\bar{\delta}s_3^n\end{aligned}$$

olacak şekilde elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.2.2 (Üreteç Fonksiyonu): Bihiperbolik Pell-Padovan dizisi $\{\overline{BR_n}\}$ için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{BR_n}x^n = \frac{(1+j_1+j_2+3j_3)+(1+j_1+3j_2+3j_3)x+(-1+j_1+j_2+j_3)x^2}{1-2x^2-x^3} \tag{2.11}$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{BR_n}x^n$$

olsun. O halde elde edilen bu $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{BR_n}x^n=\overline{BR_0}+\overline{BR_1}x+\overline{BR_2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\overline{BR_n}x^n$$

$$2x^2f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2\overline{BR_n}x^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}2\overline{BR_{n-2}}x^n=2\overline{BR_0}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}2\overline{BR_{n-2}}x^n$$

$$x^3f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{BR_n}x^{n+3}=\sum_{n=3}^{\infty}\overline{BR_{n-3}}x^n$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$(1-2x^2-x^3)f(x)=\overline{BR_0}+\overline{BR_1}x+(\overline{BR_2}-2\overline{BR_0})x^2$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}(\overline{BR_n}-2\overline{BR_{n-2}}-\overline{BR_{n-3}})x^n$$

elde edilir. (2.9) bağıntısı ve başlangıç şartları kullanılarak,

$$f(x)=\frac{(1+j_1+j_2+3j_3)+(1+j_1+3j_2+3j_3)x+(-1+j_1+j_2+j_3)x^2}{1-2x^2-x^3}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Lemma 2.2.1: Her $n\in\mathbb{Z}^+$ için, $\overline{BR_{2n+2}}-\overline{BR_{2n+1}}-\overline{BR_{2n}}=-1+j_1-j_2+j_3$ ifadesi doğrudur.

İspat. Teorem 2.2.1'de verilen Bihiperbolik Pell-Padovan dizisi $\{\overline{BR_n}\}$'nin binet benzeri formülü kullanılarak eşitliğin doğruluğu kolaylıkla ispatlanabilir. ■

Lemma 2.2.2: Her $n\in\mathbb{Z}^+$ için, $\overline{BR_{2n+1}}-\overline{BR_{2n}}-\overline{BR_{2n-1}}=1-j_1+j_2-j_3$ ifadesi doğrudur.

İspat. Teorem 2.2.1'de verilen Bihiperbolik Pell-Padovan dizisi $\{\overline{BR_n}\}$'nin binet benzeri formülü kullanılarak eşitliğin doğruluğu kolaylıkla ispatlanabilir. ■

Teorem 2.2.3: Bihiperbolik Pell-Padovan sayıları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $\sum_{k=0}^{n} \overline{BR_k} = \frac{1}{2}[\overline{BR_n} + \overline{BR_{n+1}} + \overline{BR_{n+2}} - (1 + 3j_1 + 5j_2 + 7j_3)],$ (2.12)

ii. $\sum_{k=0}^{n} \overline{BR_{2k}} = \overline{BR_{2n+1}} - n(1 - j_1 + 3j_2 - j_3) + (2n - 2)j_2$ (2.13)

iii. $\sum_{k=0}^{n} \overline{BR_{2k+1}} = \overline{BR_{2n+1}} + \overline{BR_{2n}} + (n - 1)(1 - 5j_1 + j_2 - 9j_3)$
$+(4n - 6)j_1 + (8n - 12)j_3$ (2.14)

İspat.

(i) Öncelikle (2.8) bağıntısıyla verilen Bihiperbolik Pell-Padovan dizisi $\{\overline{BR_n}\}$'nin tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \overline{BR_k} &= \sum_{k=0}^{n}(R_k + j_1R_{k+1} + j_2R_{k+2} + j_3R_{k+3}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} R_k + j_1 \sum_{k=0}^{n} R_{k+1} + j_2 \sum_{k=0}^{n} R_{k+2} + j_3 \sum_{k=0}^{n} R_{k+3} \\
&= \sum_{k=0}^{n} R_k + j_1 \sum_{k=1}^{n+1} R_k + j_2 \sum_{k=2}^{n+2} R_k + j_3 \sum_{k=3}^{n+3} R_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} R_k + j_1(\sum_{k=0}^{n} R_k - R_0 + R_{n+1}) \\
&\quad +j_2(\sum_{k=0}^{n} R_k - R_0 - R_1 + R_{n+1} + R_{n+2}) \\
&\quad +j_3(\sum_{k=0}^{n} R_k - R_0 - R_1 - R_2 + R_{n+1} + R_{n+2} + R_{n+3})
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Tanım 1.3.3 ‘de verilmiş olan R_0, R_1 ve R_2 başlangıç şartları ve (1.9) bağıntısı yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{BR_k} = \frac{1}{2}[\overline{BR_n} + \overline{BR_{n+1}} + \overline{BR_{n+2}} - (1 + 3j_1 + 5j_2 + 7j_3)],$$

bağıntısı elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

(ii) İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 1$ için sonuç açıkça doğrudur. Hipotezin $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğu kabul edilsin. Yani,

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{BR_{2k}} = \overline{BR_{2n+1}} - n(1 - j_1 + 3j_2 - j_3) + (2n - 2)j_2,$$

olsun. Şimdi $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$ için hipotezin doğru olduğunu, yani,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BR_{2k}} = \overline{BR_{2n+3}} - (n + 1)(1 - j_1 + 3j_2 - j_3) + (2n)j_2$$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde (2.9) bağıntısından,

$$\sum_{i=0}^{n+1} \overline{BR_{2\iota}} = \sum_{k=0}^{n} \overline{BR_{2k}} + \overline{BR_{2n+2}}$$
$$= \overline{BR_{2n+1}} - n(1 - j_1 + 3j_2 - j_3) + (2n - 2)j_2 + \overline{BR_{2n+2}}$$

elde edilir. Burada eşitliğin sağ tarafına $\overline{BR_{2n+1}} + \overline{BR_{2n}} + (1 - j_1 + 3j_2 - j_3)$ terimi eklenip çıkarılırsa, gerekli işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BR_{2k}} &= \overline{BR_{2n+1}} - n(1 - j_1 + 3j_2 - j_3) + (2n)j_2 - 2j_2 + \overline{BR_{2n+2}} \\ &\quad + \overline{BR_{2n+1}} + \overline{BR_{2n}} + (1 - j_1 + 3j_2 - j_3) \\ &\quad - \overline{BR_{2n+1}} - \overline{BR_{2n}} - (1 - j_1 + 3j_2 - j_3) \\ &= 2\overline{BR_{2n+1}} + \overline{BR_{2n}} - (n + 1)(1 + j_1 + j_2 + 2j_3) + (2n)j_2 \\ &\quad + \overline{BR_{2n+2}} - \overline{BR_{2n+1}} - \overline{BR_{2n}} + (1 - j_1 + 3j_2 - j_3) - 2j_2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Lemma 2.2.1'de yer alan ifadeye göre, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\overline{BR_{2n+2}} - \overline{BR_{2n+1}} - \overline{BR_{2n}} = -1 + j_1 - j_2 + j_3$ olduğundan bu ifade yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BR_{2k}} = \overline{BR_{2n+3}} - (n + 1)(1 - j_1 + 3j_2 - j_3) + (2n)j_2$$

bulunur. Sonuç olarak ispat tamamlanır. ■

(iii) İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 1$ için sonuç açıkça doğrudur. Hipotezin $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğu kabul edilsin. Yani,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \overline{BR_{2k+1}} &= \overline{BR_{2n+1}} + \overline{BR_{2n}} + (n - 1)(1 - 5j_1 + j_2 - 9j_3) \\ &\quad + (4n - 6)j_1 + (8n - 12)j_3\end{aligned}$$

olsun. Şimdi $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$ için hipotezin doğru olduğunu, yani,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BR_{2k+1}} &= \overline{BR_{2n+3}} + \overline{BR_{2n+2}} + n(1 - 5j_1 + j_2 - 9j_3) + (4n - 2)j_1 \\ &\quad + (8n - 4)j_3\end{aligned}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde (2.9) bağıntısından,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BR_{2k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \overline{BR_{2k+1}} + \overline{BR_{2n+3}}$$
$$= \overline{BR_{2n+1}} + \overline{BR_{2n}} + (n-1)(1-5j_1+j_2-9j_3)$$
$$+(4n-6)j_1 + (8n-12)j_3 + \overline{BR_{2n+3}}$$

elde edilir. Burada eşitliğin sağ tarafına $\overline{BR_{2n}} + \overline{BR_{2n-1}}$ terimi eklenip çıkarılırsa, gerekli işlemler yapılarak,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BR_{2k+1}} = \overline{BR_{2n+1}} + \overline{BR_{2n}} + (n-1)(1-5j_1+j_2-9j_3)$$
$$+(4n-6)j_1 + (8n-12)j_3 + \overline{BR_{2n+3}} + \overline{BR_{2n}} + \overline{BR_{2n-1}}$$
$$-\overline{BR_{2n}} - \overline{BR_{2n-1}}$$
$$= \overline{BR_{2n+3}} + \overline{BR_{2n+2}} + n(1-5j_1+j_2-9j_3) + (4n-2)j_1$$
$$+(8n-4)j_3 + \overline{BR_{2n+1}} - \overline{BR_{2n}} - \overline{BR_{2n-1}} + (-1+j_1-j_2+j_3)$$

elde edilir. Burada Lemma 2.2.2'de yer alan ifadeye göre her $n \in Z^+$ için, $\overline{BR_{2n+1}} - \overline{BR_{2n}} - \overline{BR_{2n-1}} = 1 - j_1 + j_2 - j_3$ olduğundan bu ifade yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BR_{2k+1}} = \overline{BR_{2n+3}} + \overline{BR_{2n+2}} + (n)(1-5j_1+j_2-9j_3) + (4n-2)j_1$$
$$+(8n-4)j_3$$

bulunur. Sonuç olarak ispat tamamlanır. ■

2.3. Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan Sayıları

Bu bölümde ilk bölümde tanımı ve özellikleri verilen Jacobsthal-Padovan sayıları kullanılarak elde edilen Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan sayıları hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 2.3.1: $n \in \mathbb{N}$ için, Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan dizisi, $\{\overline{BV_n}\}$, şu şekilde tanımlanır,

$$\overline{BV_n} = V_n + j_1 V_{n+1} + j_2 V_{n+2} + j_3 V_{n+3}. \quad (2.15)$$

Burada $\overline{BV_n}$, n'inci Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan sayısı ve V_n ise (1.15)'deki Jacobsthal-Padovan sayısıdır. $n \geq 3$ olmak üzere Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan dizisi $\{\overline{BV_n}\}$ için

$$\overline{BV_n} = \overline{BV_{n-2}} + 2\overline{BV_{n-3}}, \tag{2.16}$$

rekürans bağıntısının sağlandığı açıktır. Bu $\{\overline{BV_n}\}$ dizisinin başlangıç şartları, $\overline{BV_0} = 1 + j_1 + j_2 + 3j_3$ ve $\overline{BV_1} = 1 + j_1 + 3j_2 + 3j_3$ olacak şekilde verilmektedir.

Teorem 2.3.1 (Binet Benzeri Formülü): $n \in \mathbb{N}$ için, t_1, t_2 ve t_3, $x^3 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\underline{a} = \frac{(t_2-1)(t_3-1)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}, \underline{b} = \frac{(t_1-1)(t_3-1)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}, \underline{c} = \frac{(t_1-1)(t_2-1)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)},$$

$$\underline{\alpha} = 1 + j_1t_1 + j_2t_1^2 + j_3t_1^3, \underline{\beta} = 1 + j_1t_2 + j_2t_2^2 + j_3t_2^3, \underline{\delta} = 1 + j_1t_3 + j_2t_3^2 + j_3t_3^3$$

olmak üzere, Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan dizisi $\{\overline{BV_n}\}$ için Binet benzeri formül,

$$\overline{BV_n} = \underline{a}\,\underline{\alpha}t_1^n + \underline{b}\,\underline{\beta}t_2^n + \underline{c}\,\underline{\delta}t_3^n \tag{2.17}$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak (1.16) formülünde belirtilen Jacobsthal-Padovan dizisinin Binet benzeri formülü ve (2.15) bağıntısıyla verilen Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan dizisi $\{\overline{BV_n}\}$'nin tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\overline{BV_n} &= V_n + j_1V_{n+1} + j_2V_{n+2} + j_3V_{n+3}\\ &= \underline{a}{t_1}^n + \underline{b}{t_2}^n + \underline{c}{t_3}^n + j_1\left(\underline{a}{t_1}^{n+1} + \underline{b}{t_2}^{n+1} + \underline{c}{t_3}^{n+1}\right)\\ &\quad + j_2\left(\underline{a}{t_1}^{n+2} + \underline{b}{t_2}^{n+2} + \underline{c}{t_3}^{n+2}\right) + j_3\left(\underline{a}{t_1}^{n+3} + \underline{b}{t_2}^{n+3} + \underline{c}{t_3}^{n+3}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlik bazı basit işlemler yapılarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\overline{BV_n} &= \underline{a}{t_1}^n(1 + j_1t_1 + j_2t_1^2 + j_3t_1^3) + \underline{b}{t_2}^n(1 + j_1t_2 + j_2t_2^2 + j_3t_2^3)\\ &\quad + \underline{c}{t_3}^n(1 + j_1t_3 + j_2t_3^2 + j_3t_3^3)\end{aligned}$$

$$= \underline{a\alpha} t_1^n + \underline{b\beta} t_2^n + \underline{c\delta} t_3^n$$

olacak şekilde elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.3.2 (Üreteç Fonksiyonu): Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan dizisi $\{\overline{BV_n}\}$ için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{BV_n} x^n = \frac{(1+j_1+j_2+3j_3)+(1+j_1+3j_2+3j_3)x+(2j_1+2j_2+2j_3)x^2}{1-x^2-2x^3} \tag{2.18}$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BV_n} x^n$$

olsun. O halde elde edilen bu $h(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BV_n} x^n = \overline{BV_0} + \overline{BV_1} x + \overline{BV_2} x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \overline{BV_n} x^n$$

$$x^2 h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BV_n} x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \overline{BV_{n-2}} x^n = \overline{BV_0} x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \overline{BV_{n-2}} x^n$$

$$2x^3 h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\overline{BV_n} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} 2\overline{BV_{n-3}} x^n$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$(1 - x^2 - 2x^3)h(x) = \overline{BV_0} + \overline{BV_1} x + (\overline{BV_2} - \overline{BV_0})x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (\overline{BV_n} - \overline{BV_{n-2}} - 2\overline{BV_{n-3}})x^n$$

elde edilir. (2.16) bağıntısı ve başlangıç şartları kullanılarak,

$$h(x) = \frac{(1 + j_1 + j_2 + 3j_3) + (1 + j_1 + 3j_2 + 3j_3)x + (2j_1 + 2j_2 + 2j_3)x^2}{1 - x^2 - 2x^3}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.3.3: Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan sayıları için aşağıdaki eşitlikleri sağlanır.

i. $\sum_{k=0}^{n} \overline{BV_k} = \frac{1}{2}(\overline{BV_{n+3}} + \overline{BV_{n+2}} - (2 + 4j_1 + 6j_2 + 8j_3)),$ (2.19)

ii. $\sum_{k=0}^{n} \overline{BV_{2k}} = \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+1}} + 2\overline{BV_{2n}} - (1 + j_1 + 3j_2 + 3j_3)),$ (2.20)

iii. $\sum_{k=0}^{n} \overline{BV_{2k+1}} = \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+2}} + 2\overline{BV_{2n+1}} - (1 + 3j_1 + 3j_2 + 5j_3)),$ (2.21)

İspat.

(i) Öncelikle (2.15) bağıntısıyla verilen Bihiperbolik Jacobsthal-Padovan dizisi $\{\overline{BV_n}\}$'nin tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \overline{BV_k} &= \sum_{k=0}^{n}(V_k + j_1V_{k+1} + j_2V_{k+2} + j_3V_{k+3})\\
&= \sum_{k=0}^{n} V_k + j_1 \sum_{k=0}^{n} V_{k+1} + j_2 \sum_{k=0}^{n} V_{k+2} + j_3 \sum_{k=0}^{n} V_{k+3}\\
&= \sum_{k=0}^{n} V_k + j_1 \sum_{k=1}^{n+1} V_k + j_2 \sum_{k=2}^{n+2} V_k + j_3 \sum_{k=3}^{n+3} V_k\\
&= \sum_{k=0}^{n} V_k + j_1(\sum_{k=0}^{n} V_k - V_0 + V_{n+1})\\
&\quad +j_2(\sum_{k=0}^{n} V_k - V_0 - V_1 + V_{n+1} + V_{n+2})\\
&\quad +j_3(\sum_{k=0}^{n} V_k - V_0 - V_1 - V_2 + V_{n+1} + V_{n+2} + V_{n+3})\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Tanım 1.3.4 'de verilmiş olan V_0, V_1 ve V_2 başlangıç şartları ve (1.15) bağıntısı yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{BV_k} = \frac{1}{2}(\overline{BV_{n+3}} + \overline{BV_{n+2}} - (2 + 4j_1 + 6j_2 + 8j_3))$$

bağıntısı elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

(ii) İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 1$ için sonuç açıkça doğrudur. Hipotezin $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğu kabul edilsin. Yani,

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{BV_{2k}} = \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+1}} + 2\overline{BV_{2n}} - (1 + j_1 + 3j_2 + 3j_3)),$$

olsun. Şimdi $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$ için hipotezin doğru olduğunu, yani,

$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BV_{2k}} = \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+3}} + 2\overline{BV_{2n+2}} - (1 + j_1 + 3j_2 + 3j_3))$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde (2.16) bağıntısından,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BV_{2k}} &= \sum_{k=0}^{n} \overline{BV_{2k}} + \overline{BV_{2n+2}} \\ &= \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+1}} + 2\overline{BV_{2n}} - (1 + j_1 + 3j_2 + 3j_3)) + \overline{BV_{2n+2}} \\ &= \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+3}} + 2\overline{BV_{2n+2}} - (1 + j_1 + 3j_2 + 3j_3))\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak ispat tamamlanır. ■

(iii) İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 1$ için sonuç açıkça doğrudur. Hipotezin $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğu kabul edilsin. Yani,

$\sum_{k=0}^{n} \overline{BV_{2k+1}} = \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+2}} + 2\overline{BV_{2n+1}} - (1 + 3j_1 + 3j_2 + 5j_3)),$

olsun. Şimdi $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$ için hipotezin doğru olduğunu, yani,

$\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BV_{2k+1}} = \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+4}} + 2\overline{BV_{2n+3}} - (1 + 3j_1 + 3j_2 + 5j_3)),$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde (2.16) bağıntısından,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \overline{BV_{2k+1}} &= \sum_{k=0}^{n} \overline{BV_{2k+1}} + \overline{BV_{2n+3}} \\ &= \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+2}} + 2\overline{BV_{2n+1}} - (1 + 3j_1 + 3j_2 + 5j_3)) + \overline{BV_{2n+3}} \\ &= \frac{1}{2}(\overline{BV_{2n+4}} + 2\overline{BV_{2n+3}} - (1 + 3j_1 + 3j_2 + 5j_3))\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak ispat tamamlanır. ■

2.4. Bihiperbolik Padovan$-p$ Sayıları

Bu bölümde ilk bölümde tanımı ve özellikleri verilen Padovan$-p$ sayıları kullanılarak elde edilen Bihiperbolik Padovan$-p$ sayıları hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 2.4.1: $n \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}^{+}$ve $p \geq 2$ için Bihiperbolik Padovan$-p$ dizisi, $\{\overline{BPap}(n+p+2)\}$, aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}\overline{BPap}(n+p+2) &= Pap(n+p+2) + j_1\, Pap(n+p+3) \\ &\quad + j_2\, Pap(n+p+4) + j_3\, Pap(n+p+5). \qquad (2.22)\end{aligned}$$

Burada $\overline{BPap}(n+p+2)$, Bihiperbolik Padovan$-p$ sayısı ve $Pap(n+p+2)$ ise (1.21)'deki Padovan$-p$ sayısıdır. $n \geq 1$ olmak üzere Bihiperbolik Padovan$-p$ dizisi $\{\overline{BPap}(n+p+2)\}$ için

$$\overline{BPap}(n+p+2) = \overline{BPap}(n+p) + \overline{BPap}(n), \qquad (2.23)$$

rekürans bağıntısının sağlandığı açıktır. Bu $\{\overline{BPap}(n+p+2)\}$ dizisinin başlangıç şartları,

$$\overline{BPap}(1) = \overline{BPap}(2) = \cdots = \overline{BPap}(p-3) = 0,\ \overline{BPap}(p-2) = j_3,$$
$$\overline{BPap}(p-1) = j_2,\ \overline{BPap}(p) = j_1 + j_3,\ \overline{BPap}(p+1) = 1 + j_2,$$
$$\overline{BPap}(p+2) = j_1 + j_3$$

olacak şekilde verilmektedir.

Teorem 2.4.1 (Üreteç Fonksiyonu): Bihiperbolik Padovan$-p$ dizisi $\{\overline{BPap}(n+p+2)\}$ için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{BPap}(n+p+1)x^n = \frac{1+j_2+(j_1+j_3)x+j_3x^{p-1}+j_2x^p+(j_1+j_3)x^{p+1}}{1-x^2-x^{p+2}} \qquad (2.24)$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak,

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BPap}(n+p+1)x^n$$

olsun. O halde elde edilen bu $\mathcal{G}(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{BPap}(n+p+1)x^n \\ &= \overline{BPap}(p+1) + \overline{BPap}(p+2)x + \overline{BPap}(p+3)x^2 + \cdots \\ &\quad +\overline{BPap}(2p-1)x^{p-2} + \overline{BPap}(2p)x^{p-1} + \overline{BPap}(2p+1)x^p \\ &\quad +\overline{BPap}(2p+2)x^{p+1} + \textstyle\sum_{n=p+2}^{\infty} \overline{BPap}(n+p+1)x^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2\mathcal{G}(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{BPap}(n+p+1)x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \overline{BPap}(n+p-1)x^n \\ &= \overline{BPap}(p+1)x^2 + \overline{BPap}(p+2)x^3 + \overline{BPap}(p+3)x^4 + \cdots \\ &\quad +\overline{BPap}(2p-3)x^{p-2} + \overline{BPap}(2p-2)x^{p-1} + \overline{BPap}(2p-1)x^p \\ &\quad +\overline{BPap}(2p)x^{p+1} + \textstyle\sum_{n=p+2}^{\infty} \overline{BPap}(n+p-1)x^n\end{aligned}$$

$$x^{p+2}\mathcal{G}(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{BPap}(n+p+1)x^{n+p+2} = \sum_{n=p+2}^{\infty} \overline{BPap}(n-1)x^n$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned}(1-x^2-x^{p+2})\mathcal{G}(x) &= \overline{BPap}(p+1) + \overline{BPap}(p+2)x + \overline{BPap}(p+3)x^2 + \cdots \\ &\quad +\overline{BPap}(2p-1)x^{p-2} + \overline{BPap}(2p)x^{p-1} \\ &\quad +\overline{BPap}(2p+1)x^p + \overline{BPap}(2p+2)x^{p+1} \\ &\quad -\overline{BPap}(p+1)x^2 - \overline{BPap}(p+2)x^3 \\ &\quad -\overline{BPap}(p+3)x^4 - \cdots - \overline{BPap}(2p-3)x^{p-2} \\ &\quad -\overline{BPap}(2p-2)x^{p-1} - \overline{BPap}(2p-1)x^p \\ &\quad -\overline{BPap}(2p)x^{p+1} \\ &\quad +\textstyle\sum_{n=p+2}^{\infty}(\overline{BPap}(n+p+1) - \overline{BPap}(n+p-1) - \overline{BPap}(n-1))x^n\end{aligned}$$

elde edilir. (2.23) bağıntısı ve başlangıç şartları kullanılarak,

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1 + j_2 + (j_1 + j_3)x + j_3x^{p-1} + j_2x^p + (j_1 + j_3)x^{p+1}}{1 - x^2 - x^{p+2}}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.4.2: Bihiperbolik Padovan$-p$ sayılarının toplamları $\tilde{S}_n$ ile gösterilsin. O halde

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{BPap}(p+i) = \left(\sum_{i=1}^{p+1} Pap(n+p+2-i) - 1\right)(1+j_1+j_2+j_3)$$
$$-(j_1+j_2+2j_3) + Pap(n+p+1)(j_1+j_2+j_3)$$
$$+Pap(n+p+2)(j_2+j_3) + Pap(n+p+3)(j_3) \qquad (2.25)$$

olur.

İspat. Öncelikle (2.22) bağıntısıyla verilen Bihiperbolik Padovan$-p$ dizisi $\{\overline{BPap}(n+p+2)\}$'nin tanımı göz önüne alınırsa,

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{BPap}(p+i) = \sum_{i=1}^{n} (Pap(p+i) + j_1 Pap(p+i+1)$$
$$+ j_2 Pap(p+i+2) + j_3 Pap(p+i+3))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Pap(p+i) + j_1 \sum_{i=1}^{n} Pap(p+i+1) + j_2 \sum_{i=1}^{n} Pap(p+i+2)$$
$$+ j_3 \sum_{i=1}^{n} Pap(p+i+3)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Pap(p+i) + j_1 \sum_{i=2}^{n+1} Pap(p+i) + j_2 \sum_{i=3}^{n+2} Pap(p+i)$$
$$+ j_3 \sum_{i=4}^{n+3} Pap(p+i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Pap(p+i) + j_1\left(\sum_{i=1}^{n} Pap(p+i) - Pap(p+1) + Pap(p+n+1)\right)$$
$$+ j_2 (\sum_{i=1}^{n} Pap(p+i) - Pap(p+1) - Pap(p+2) + Pap(p+n+1)$$
$$+ Pap(p+n+2))$$
$$+ j_3 (\sum_{i=1}^{n} Pap(p+i) - Pap(p+1) - Pap(p+2) - Pap(p+3)$$
$$+ Pap(p+n+1) + Pap(p+n+2) + Pap(p+n+3))$$

elde edilir. Burada Tanım 1.3.5 'de verilmiş olan başlangıç şartları ve (1.23) bağıntısı yerlerine yazılırsa,

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{BPap}(p+i) = \left(\sum_{i=1}^{p+1} Pap(n+p+2-i) - 1\right)(1+j_1+j_2+j_3)$$
$$-(j_1+j_2+2j_3) + Pap(n+p+1)(j_1+j_2+j_3)$$
$$+Pap(n+p+2)(j_2+j_3) + Pap(n+p+3)(j_3)$$

bağıntısı elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

BÖLÜM 3

İKİ DEĞİŞKENLİ BİHİPERBOLİK FIBONACCI$-p$ VE LUCAS$-p$ POLİNOMLARI

Bu bölümde iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomları hakkında bilgi verilecektir. Ayrıca bu sayılara ait polinomların üreteç fonksiyonları, bazı özellikleri ve toplam formülleri sunulacaktır.

İlk olarak iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomlarının tanımları verilecektir.

Tanım 3.1: $p \geq 1$ tamsayı olsun. $n > p$ için, iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ polinomu,

$$\overline{BF_{p,n}}(x,y) = F_{p,n}(x,y) + j_1 F_{p,n+1}(x,y) + j_2 F_{p,n+2}(x,y) + j_3 F_{p,n+3}(x,y) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $F_{p,n}(x,y)$, (1.24) denkleminde verilen genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci$-p$ polinomudur. İki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ polinom dizisinin, $\{\overline{BF_{p,n}}(x,y)\}$, rekürans bağıntısının ise,

$$\overline{BF_{p,n}}(x,y) = x\overline{BF_{p,n-1}}(x,y) + y\overline{BF_{p,n-p-1}}(x,y) \tag{3.2}$$

şeklinde olduğu açıktır. Bu $\{\overline{BF_{p,n}}(x,y)\}$ polinom dizisinin başlangıç şartları, $\overline{BF_{p,0}}(x,y) = j_1 + j_2 x + j_3 x^2$ ve $\overline{BF_{p,1}}(x,y) = 1 + j_1 x + j_2 x^2 + j_3 x^3$ olacak şekilde verilmektedir.

Teorem 3.1 (Üreteç Fonksiyonu): İki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ polinom dizisi $\{\overline{BF_{p,n}}(x,y)\}$ için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{BF_{p,n}}(x,y)\, z^n = \frac{j_1 + j_2 x + j_3 x^2 + z + z^{p-1}(y j_3) + z^p(y j_2 + xy j_3)}{1 - xz - yz^{p+1}} \tag{3.3}$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak,

$$\bar{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BF_{p,n}}(x,y)z^n$$

olsun. O halde elde edilen bu $\bar{g}(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$\begin{aligned}\bar{g}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BF_{p,n}}(x,y)z^n \\ &= \overline{BF_{p,0}}(x,y) + \overline{BF_{p,1}}(x,y)z + \overline{BF_{p,2}}(x,y)z^2 + \cdots \\ &\quad + \overline{BF_{p,p-2}}(x,y)z^{p-2} + \overline{BF_{p,p-1}}(x,y)z^{p-1} + \overline{BF_{p,p}}(x,y)z^p \\ &\quad + \sum_{n=p+1}^{\infty} \overline{BF_{p,n}}(x,y)z^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xz\bar{g}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x\overline{BF_{p,n}}(x,y)z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x\overline{BF_{p,n-1}}(x,y)z^n \\ &= x\overline{BF_{p,0}}(x,y)z + x\overline{BF_{p,1}}(x,y)z^2 + x\overline{BF_{p,2}}(x,y)z^3 + \cdots \\ &\quad + x\overline{BF_{p,p-3}}(x,y)z^{p-2} + x\overline{BF_{p,p-2}}(x,y)z^{p-1} + x\overline{BF_{p,p-1}}(x,y)z^p \\ &\quad + \sum_{n=p+1}^{\infty} x\overline{BF_{p,n-1}}(x,y)z^n\end{aligned}$$

$$yz^{p+1}\bar{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y\overline{BF_{p,n}}(x,y)z^{n+p+1} = \sum_{n=p+1}^{\infty} y\overline{BF_{p,n-p-1}}(x,y)z^n$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned}(1 - xz - yz^{p+1})\bar{g}(z) &= \overline{BF_{p,0}}(x,y) + \left(\overline{BF_{p,1}}(x,y) - x\overline{BF_{p,0}}(x,y)\right)z \\ &\quad + \left(\overline{BF_{p,2}}(x,y) - x\overline{BF_{p,1}}(x,y)\right)z^2 + \cdots \\ &\quad + \left(\overline{BF_{p,p-2}}(x,y) - x\overline{BF_{p,p-3}}(x,y)\right)z^{p-2} \\ &\quad + \left(\overline{BF_{p,p-1}}(x,y) - x\overline{BF_{p,p-2}}(x,y)\right)z^{p-1} \\ &\quad + \left(\overline{BF_{p,p}}(x,y) - x\overline{BF_{p,p-1}}(x,y)\right)z^p \\ &\quad + \sum_{n=p+1}^{\infty}(\overline{BF_{p,n}}(x,y) - x\overline{BF_{p,n-1}}(x,y) - y\overline{BF_{p,n-p-1}}(x,y))z^n\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) bağıntısı ve başlangıç şartları kullanılarak,

$$\bar{g}(z) = \frac{j_1 + j_2x + j_3x^2 + z + z^{p-1}(yj_3) + z^p(yj_2 + xyj_3)}{1 - xz - yz^{p+1}}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Tanım 3.2: $p \geq 1$ tamsayı olsun. $n > p$ için, iki değişkenli bihiperbolik Lucas$-p$ polinomları,

$$\overline{BL_{p,n}}(x,y) = L_{p,n}(x,y) + j_1 L_{p,n+1}(x,y) + j_2 L_{p,n+2}(x,y) + j_3 L_{p,n+3}(x,y) \qquad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $L_{p,n}(x,y)$, (1.26) denkleminde verilen genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas$-p$ polinomlarıdır. İki değişkenli bihiperbolik Lucas$-p$ polinom dizisinin, $\{\overline{BL_{p,n}}(x,y)\}$, rekürans bağıntısının ise,

$$\overline{BL_{p,n}}(x,y) = x\overline{BL_{p,n-1}}(x,y) + y\overline{BL_{p,n-p-1}}(x,y) \qquad (3.5)$$

şeklinde olduğu açıktır. Bu $\{\overline{BL_{p,n}}(x,y)\}$ polinom dizisinin başlangıç şartları,

$\overline{BL_{p,0}}(x,y) = p + 1 + j_1 x + j_2 x^2 + j_3 x^3$ ve

$\overline{BL_{p,1}}(x,y) = x + j_1 x^2 + j_2 x^3 + j_3 x^4$ olacak şekilde verilmektedir.

Teorem 3.2 (Üreteç Fonksiyonu): İki değişkenli bihiperbolik Lucas$-p$ polinom dizisi $\{\overline{BL_{p,n}}(x,y)\}$ için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{BL_{p,n}}(x,y)\, z^n = \frac{(p+1)+j_1x+j_2x^2+j_3x^3-z(xp)+z^{p-2}(y(p+1)j_3)}{1-xz-yz^{p+1}} + \frac{z^{p-1}(y(p+1)j_2+xyj_3)+z^p(y(p+1)j_1-xypj_2)}{1-xz-yz^{p+1}} \qquad (3.6)$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak,

$$\bar{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BL_{p,n}}(x,y) z^n$$

olsun. O halde elde edilen bu $\bar{h}(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$\bar{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BL_{p,n}}(x,y) z^n$$

$$= \overline{BL_{p,0}}(x,y) + \overline{BL_{p,1}}(x,y)z + \overline{BL_{p,2}}(x,y)z^2 + \cdots$$
$$+\overline{BL_{p,p-3}}(x,y)z^{p-3} + \overline{BL_{p,p-2}}(x,y)z^{p-2} + \overline{BL_{p,p-1}}(x,y)z^{p-1}$$
$$+\overline{BL_{p,p}}(x,y)z^{p} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \overline{BL_{p,n}}(x,y)z^{n}$$

$$xz\bar{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x\overline{BL_{p,n}}(x,y)z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x\overline{BL_{p,n-1}}(x,y)z^{n}$$
$$= x\overline{BL_{p,0}}(x,y)z + x\overline{BL_{p,1}}(x,y)z^2 + x\overline{BL_{p,2}}(x,y)z^3 + \cdots$$
$$+x\overline{BL_{p,p-4}}(x,y)z^{p-3} + x\overline{BL_{p,p-3}}(x,y)z^{p-2} + x\overline{BL_{p,p-2}}(x,y)z^{p-1}$$
$$+x\overline{BL_{p,p-1}}(x,y)z^{p} + \sum_{n=p+1}^{\infty} x\overline{BL_{p,n-1}}(x,y)z^{n}$$

$$yz^{p+1}\bar{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y\overline{BL_{p,n}}(x,y)z^{n+p+1} = \sum_{n=p+1}^{\infty} y\overline{BL_{p,n-p-1}}(x,y)z^{n}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$(1 - xz - yz^{p+1})\bar{h}(z) = \overline{BL_{p,0}}(x,y) + \left(\overline{BL_{p,1}}(x,y) - x\overline{BL_{p,0}}(x,y)\right)z$$
$$+\left(\overline{BL_{p,2}}(x,y) - x\overline{BL_{p,1}}(x,y)\right)z^2 + \cdots$$
$$+\left(\overline{BL_{p,p-3}}(x,y) - x\overline{BL_{p,p-4}}(x,y)\right)z^{p-3}$$
$$+\left(\overline{BL_{p,p-2}}(x,y) - x\overline{BL_{p,p-3}}(x,y)\right)z^{p-2}$$
$$+\left(\overline{BL_{p,p-1}}(x,y) - x\overline{BL_{p,p-2}}(x,y)\right)z^{p-1}$$
$$+\left(\overline{BL_{p,p}}(x,y) - x\overline{BL_{p,p-1}}(x,y)\right)z^{p}$$
$$+\sum_{n=p+1}^{\infty}(\overline{BL_{p,n}}(x,y) - x\overline{BL_{p,n-1}}(x,y) - y\overline{BL_{p,n-p-1}}\,(x,y))z^{n}$$

elde edilir. (3.5) bağıntısı ve başlangıç şartları kullanılarak,

$$\bar{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{BL_{p,n}}(x,y)\, z^{n} = \frac{(p+1)+j_1x+j_2x^2+j_3x^3-z(xp)+z^{p-2}(y(p+1)j_3)}{1-xz-yz^{p+1}}$$
$$+\frac{z^{p-1}(y(p+1)j_2+xyj_3)+z^{p}(y(p+1)j_1-xypj_2)}{1-xz-yz^{p+1}}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.3: $\overline{BF_{p,n}}(x,y)$ ve $\overline{BL_{p,n}}(x,y)$ sırasıyla iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomları olsunlar. O halde,

$$\overline{BL_{p,n}}(x,y) = \overline{BF_{p,n+1}}(x,y) + py\overline{BF_{p,n-p}}(x,y) \tag{3.7}$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. Teorem 1.3.14'te verilen (1.28) bağıntısı ve (3.1) ile (3.4)'te verilen iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomlarının tanımları göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\overline{BL_{p,n}}(x,y) &= L_{p,n}(x,y) + j_1L_{p,n+1}(x,y) + j_2L_{p,n+2}(x,y) + j_3L_{p,n+3}(x,y) \\
&= \Big(F_{p,n+1}(x,y) + pyF_{n-p}(x,y)\Big) + j_1\big(F_{p,n+2}(x,y) + pyF_{n+1-p}(x,y)\big) \\
&\quad +j_2\Big(F_{p,n+3}(x,y) + pyF_{n+2-p}(x,y)\Big) \\
&\quad +j_3\big(F_{p,n+4}(x,y) + pyF_{n+3-p}(x,y)\big) \\
&= ((F_{p,n+1}(x,y) + j_1F_{p,n+2}(x,y) + j_2F_{p,n+3}(x,y) + j_3F_{p,n+4}(x,y)) \\
&\quad +py(F_{p,n-p}(x,y) + j_1F_{p,n+1-p}(x,y) + j_2F_{p,n+2-p}(x,y) \\
&\qquad +j_3F_{p,n+3-p}(x,y)) \\
&= \overline{BF_{p,n+1}}(x,y) + py\overline{BF_{p,n-p}}(x,y)
\end{aligned}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.4: $\overline{BF_{p,n}}(x,y)$ ve $\overline{BL_{p,n}}(x,y)$ sırasıyla iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomları olsunlar. O halde,

$$\frac{\partial\overline{BL_{p,n}}(x,y)}{\partial x} = n\overline{BF_{p,n}}(x,y) + \sum_{k=1}^{3} kj_kF_{p,n+k}\,(x,y) \tag{3.8}$$

ve

$$\frac{\partial\overline{BL_{p,n}}(x,y)}{\partial y} = n\overline{BF_{p,n-p}}(x,y) + \sum_{k=1}^{3} kj_kF_{p,n+k-p}\,(x,y) \tag{3.9}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat. Teorem 1.3.15'te verilen (1.29) ve (1.30) bağıntıları ve (3.1) ile (3.4)'te verilen iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomlarının tanımları göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\overline{BL_{p,n}}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}L_{p,n}(x,y) + j_1\frac{\partial}{\partial x}L_{p,n+1}(x,y) + j_2\frac{\partial}{\partial x}L_{p,n+2}(x,y)\\ &\quad +j_3\frac{\partial}{\partial x}L_{p,n+3}(x,y)\\ &= nF_{p,n}(x,y) + j_1(n+1)F_{p,n+1}(x,y)\\ &\quad +j_2(n+2)F_{p,n+2}(x,y) + j_3(n+3)F_{p,n+3}(x,y)\\ &= n\big(F_{p,n}(x,y) + j_1F_{p,n+1}(x,y) + j_2F_{p,n+2}(x,y) + j_3F_{p,n+3}(x,y)\big)\\ &\quad +j_1F_{p,n+1}(x,y) + 2j_2F_{p,n+2}(x,y) + 3j_3F_{p,n+3}(x,y)\\ &= n\overline{BF_{p,n}}(x,y) + \textstyle\sum_{k=1}^{3} kj_kF_{p,n+k}(x,y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\overline{BL_{p,n}}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}L_{p,n}(x,y) + j_1\frac{\partial}{\partial y}L_{p,n+1}(x,y) + j_2\frac{\partial}{\partial y}L_{p,n+2}(x,y)\\ &\quad +j_3\frac{\partial}{\partial y}L_{p,n+3}(x,y)\\ &= nF_{p,n-p}(x,y) + j_1(n+1)F_{p,n+1-p}(x,y)\\ &\quad +j_2(n+2)F_{p,n+2-p}(x,y) + j_3(n+3)F_{p,n+3-p}(x,y)\\ &= n(F_{p,n-p}(x,y) + j_1F_{p,n+1-p}(x,y) + j_2F_{p,n+2-p}(x,y)\\ &\quad +j_3F_{p,n+3-p}(x,y))\\ &\quad +j_1F_{p,n+1-p}(x,y) + 2j_2F_{p,n+2-p}(x,y) + 3j_3F_{p,n+3-p}(x,y)\\ &= n\overline{BF_{p,n-p}}(x,y) + \textstyle\sum_{k=1}^{3} kj_kF_{p,n+k-p}(x,y)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.5: İki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ ve iki değişkenli bihiperbolik Lucas$-p$ polinomlarının toplamları,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} \overline{BF_{p,n}}(x,y) = &\frac{(1+j_1+j_2+j_3)}{(x+y-1)}\left(F_{p,k+p+1}(x,y) - F_{p,p}(x,y)\right)\\ &+\frac{(1-x)(1+j_1+j_2+j_3)}{(x+y-1)}\left(\sum_{n=0}^{p-1}\left(F_{p,n+k+1}(x,y) - F_{p,n}(x,y)\right)\right)\\ &+(j_1+j_2+j_3)F_{p,k+1}(x,y) + (j_2+j_3)F_{p,k+2}(x,y)\\ &+j_3F_{p,k+3}(x+y) - j_2 - j_3(1+x)\end{aligned} \tag{3.10}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} \overline{BL_{p,n}}(x,y) = &\frac{(1+j_1+j_2+j_3)}{(x+y-1)}\left(L_{p,k+p+1}(x,y) - L_{p,p}(x,y)\right)\\ &+\frac{(1-x)(1+j_1+j_2+j_3)}{(x+y-1)}\left(\sum_{n=0}^{p-1}\left(L_{p,n+k+1}(x,y) - L_{p,n}(x,y)\right)\right)\\ &+(j_1+j_2+j_3)L_{p,k+1}(x,y) + (j_2+j_3)L_{p,k+2}(x,y)\\ &+j_3L_{p,k+3}(x,y) - (p+1)(j_1+j_2+j_2) - (j_2+j_3)x - j_3x^2\end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklinde elde edilir.

İspat. Teorem 1.3.16'da verilen (1.31) bağıntısı ve (3.1) 'de verilen iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci$-p$ polinomlarının tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} \overline{BF_{p,n}}(x,y) &= \sum_{n=0}^{k}(F_{p,n}(x,y) + j_1F_{p,n+1}(x,y) + j_2F_{p,n+2}(x,y) + j_3F_{p,n+3}(x,y))\\ &= \sum_{n=0}^{k} F_{p,n}(x,y) + j_1\sum_{n=0}^{k} F_{p,n+1}(x,y) + j_2\sum_{n=0}^{k} F_{p,n+2}(x,y) + j_3\sum_{n=0}^{k} F_{p,n+3}(x,y)\\ &= \sum_{n=0}^{k} F_{p,n}(x,y) + j_1\sum_{n=1}^{k+1} F_{p,n}(x,y) + j_2\sum_{n=2}^{k+2} F_{p,n}(x,y) + j_3\sum_{n=3}^{k+3} F_{p,n}(x,y)\\ &= \sum_{n=0}^{k} F_{p,n}(x,y) + j_1\left(\sum_{n=0}^{k} F_{p,n}(x,y) - F_{p,0}(x,y) + F_{p,k+1}(x,y)\right)\\ &\quad +j_2\left(\sum_{n=0}^{k} F_{p,n}(x,y) - F_{p,0}(x,y) - F_{p,1}(x,y) + F_{p,k+1}(x,y) + F_{p,k+2}(x,y)\right)\\ &\quad +j_3(\sum_{n=0}^{k} F_{p,n}(x,y) - F_{p,0}(x,y) - F_{p,1}(x,y) - F_{p,2}(x,y)\\ &\qquad +F_{p,k+1}(x,y) + F_{p,k+2}(x,y) + F_{p,k+3}(x,y))\end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 1.3.6 'daki başlangıç şartları göz önüne alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{k} \overline{BF_{p,n}}(x,y) = \sum_{n=0}^{k} F_{p,n}(x,y)\,(1 + j_1 + j_2 + j_3) + (j_1 + j_2 + j_3)F_{p,k+1}(x,y)$$
$$+(j_2 + j_3)F_{p,k+2}(x,y) + j_3 F_{p,k+3}(x + y) - j_2 - j_3(1 + x)$$

bulunur. Burada (1.31) bağıntısında verilen $\sum_{n=0}^{k} F_{p,n}(x,y)$ ifadesinin eşiti yerine yazılırsa ispat tamalanmış olur.

Teorem 1.3.16'da verilen (1.32) bağıntısı ve (3.4)'de verilen iki değişkenli bihiperbolik Lucas$-p$ polinomlarının tanımı göz önüne alınırsa, (3.11) bağıntısının ispatı yukarıdaki (3.10) bağıntısının ispatına benzer şekilde yapılabilir. Bu şekilde ispat tamamlanır. ■

BÖLÜM 4

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bihiperbolik sayıların tarihsel gelişimi detaylı bir şekilde sunulmuştur. Ayrıca tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan genelleştirilmiş Tribonacci sayıları, Padovan$-p$ sayıları ve iki değişkenli Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomları hakkında temel tanım, teorem ve özelliklere de bu bölümde yer verilmiştir. İkinci bölümde, ilk olarak bihiperbolik Padovan sayılarının tanımı yapılmış olup ardından bu sayıların oluşturduğu dizilere ait üreteç fonksiyonu, Binet formülü ve bu sayıların bazı toplam formüllerine yer verilmiştir. Daha sonra bu tanımları, Pell-Padovan, Jacobsthal-Padovan ve Padovan$-p$ sayıları takip etmiştir. Padovan sayıları için elde edilen sonuçlara benzer olarak bu sayılar için de üreteç fonksiyonu ve bazı özellikler sunulmuştur. Üçüncü bölümde ise bihiperbolik iki değişkenli Fibonacci$-p$ ve Lucas$-p$ polinomları tanıtılmış ve bu polinomların aralarındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca bu polinomlar için üreteç fonksiyonları ve bazı özellikler elde edilmiştir. Son bölümde ise tezin literatüre olan katkısından bahsedilmiştir.

Sonuç olarak bu tez çalışmasında bazı genelleştirilmiş bihiperbolik sayılar ve polinomlar detayları ile incelenerek özellikleri sunulmuştur. Tez çalışmasından elde edilen sonuçların, literatürde pek çok matematikçi tarafından çalışılan bihiperbolik sayıların ve polinomların anlaşılabilirliğinin daha da artması ve bu alanda gelecekteki araştırmalara katkıda bulunması beklenmektedir.

[36] numaralı kaynakta genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları için matris polinomları dikkate alınmıştır. Bu çalışmayı göz önüne alarak ve bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlardan yola çıkarak genelleştirilmiş iki değişkenli bihiperbolik Fibonacci ve Lucas matris polinomlarının elde edilip edilmeyeceği araştırılıp bu matris polinomları için de benzer bir çalışma yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Hamilton, W. R., “Elements of quaternions”, *Longmans, Green, & Company*, 1866.
2. Cockle, J., “On certain functions resembling quaternions, and on a new imaginary in algebra”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 33(224), 435-439, 1848.
3. Segre, C., “Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici”, *Mathematische Annalen,* 40, 413-467, 1892.
4. Cockle, J., “On a new imaginary in algebra”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(226), 37-47, 1849.
5. Cockle, J., “On the symbols of algebra, and on the theory of tesarines”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(231), 406-410, 1849.
6. Cockle, J., “On impossible equations, on impossible quantities, and on tesarines”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science,* 37, 281-283, 1850.
7. Yaglom, I. M., “A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis”, *Springer-Verlag*, s. 1-326, New York, 1979.
8. Sobczyk, G., “The hyperbolic number plane”, *The College Mathematics Journal*, 26(4), 268-280, 1995.
9. Pogorui, A. A., Rodriguez-Dagnino, R. M., Rodríguez-Said, R. D., “On the set of zeros of bihyperbolic polynomials”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 53(7), 685-690, 2008.
10. Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., Zampetti, P., “The Mathematics of Minkowski Space-time with an Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers”, *Birkhauser Verlag*, s. 1-265, Basel, Boston, Berlin, 2008.
11. Olariu, S., “Complex Numbers in $n-$dimensions”, *North-Holland Mathematics Studies*, (190), s. 51–148, Elsevier, Amsterdam, Boston, 2002.

12. Rochon, D., Shapiro M., “On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers”, *An. Univ. Oradea Fasc. Mat.,* 11, 71-110, 2004.
13. Bilgin, M., Ersoy S., “Algebraic properties of bihyperbolic numbers”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 30(1), 1-17, 2020.
14. Yalavigi, C. C., “A Note on ‘Another Generalized Fibonacci Sequence’”, *The Mathematics Student*, 39(407), 08, 1971.
15. Yalavigi, C. C., “Properties of Tribonacci numbers”, *The Fibonacci Quarterly,* 10(3), 231-246, 1972.
16. Shannon, A. G., Horadam, A. F., “Some properties of third-order recurrence relations”, *The Fibonacci Quarterly*, 10(2), 135-146, 1972.
17. Scott, A., Del Aney, T. O. M., Hoggatt Jr, V. E., “The Tribonaccı Sequence”, *The Fibonacci Quarterly*, 15(3), 193–200, 1977.
18. Shannon, A., “Tribonacci numbers and Pascal’s pyramid”, *The Fibonacci Quarterly*, 15(3), 268, 1977.
19. Spickerman, W. R., “Binet’s formula for the Tribonacci sequence”, *The Fibonacci Quart*, 20(2), 118-120, 1982.
20. Bruce, I., “A modified Tribonacci sequence”, *The Fibonacci Quarterly*, 22(3), 244-246, 1984.
21. Pethe, S., “Some identities for Tribonacci sequences”, *The Fibonacci Quarterly*, 26(2), 144-151, 1988.
22. Shannon, A. G., Anderson, P. G., Horadam, A. F., “Properties of Cordonnier, Perrin and van der Laan numbers”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(7), 825-831, 2006.
23. Stakhov, A. and Rozin, B., “The "golden" hyperbolic models of Universe”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(2), 159-171, 2007.
24. Tuglu, N., Kocer, E. G., Stakhov, A., “Bivariate fibonacci like p–polynomials”, *Applied Mathematics and Computation*, 217(24), 10239-10246, 2011.
25. Choi, E., “Modular Tribonacci numbers by matrix method”, *The Pure and Applied Mathematics*, 20(3), 207-221, 2013.

26. Yılmaz, N., Taşkara, N., "Tribonacci and Tribonacci-Lucas numbers via the determinants of special matrices", *Applied Mathematical Sciences*, 8(39), 1947-1955, 2014.
27. Yılmaz, N., "Padovan ve Perrin sayılarının matris temsilleri", *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi,* Konya, 2015.
28. Deveci, O., Karaduman, E., "On the Padovan$-p$ numbers", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(4), 579-592, 2017.
29. Alp, M., Irmak, N. and Szalay, L., "Two-periodic ternary recurrences and their Binet-formula", *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 81(2), 227-232, 2017.
30. Güngör M.A. Azak A.Z., "Investigation of Dual-Complex Fibonacci, Dual-Complex Lucas Numbers and Their Properties", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27(4), 3083-3096, 2017.
31. Taşçı, D., "Padovan and Pell-Padovan Quaternions", *Journal of Science and Arts*, 42(1), 125-132, 2018.
32. Soykan, Y., "Summing formulas for generalized Tribonacci numbers", *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 3(1), 1-11, 2020.
33. Soykan, Y., "A study on generalized Jacobsthal-Padovan numbers", *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, 4(2), 227-251, 2020.
34. Bród, D., Szynal-Liana, A., Włoch, I., "On some combinatorial properties of bihyperbolic numbers of the Fibonacci type", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(6), 4607-4615, 2021.
35. Sloane N.J.A., "The on-line encyclopedia of integer sequences", Available: http://oeis.org/
36. Yılmaz, N., "The generalized bivariate Fibonacci and Lucas matrix polynomials", *Mathematica Montisnigri*, 53*, 2022*.