

T. C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYUMLU KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ANALİTİK VE YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
Furkan Muzaffer ÇELİK

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2024
NEVŞEHİR

T. C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYUMLU KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ANALİTİK VE YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
Furkan Muzaffer ÇELİK

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2024

Doç. Dr. Mehmet ŞENOL danışmanlığında **Furkan Muzaffer ÇELİK** tarafından hazırlanan “**Uyumlu Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Analitik ve Yaklaşık Çözümleri**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

.././20..

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ulviye DEMİRBİLEK

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../... tarih ve kararı ile onaylanmıştır.

...../...../20.....

Prof. Dr. Cemal ÇARBOĞA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Furkan Muzaffer ÇELİK



TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőmamın tamamlanmasında Sayın Hocam Doç. Dr. Mehmet ŞENOL'a sağladığınız kıymetli rehberlik, desteğiniz ve sabrınız için içtenlikle teşekkür ederim. Profesyonel ynlendirmeleriniz ve değerli geri bildirimleriniz, bu çalıőmanın niteliğini ve kapsamını artırdı. Sizin cesaretlendirici yaklaőımınız ve samimi ilginiz, her adımda beni daha da motive etti.

Ayrıca, aileme ve sevdiklerime sonsuz destekleri ve sabırları için teşekkür etmek istiyorum. Onların moral desteği ve güveni, bu uzun süreçte benim yanımda olduğumu hissettirdi.

Son olarak, tezimi değerlendiren jüri üyelerine, bilgi paylaőımı ve iőbirliėi için minnettarım. Onların samimi eleőtirileri ve katkıları, bu çalıőmanın zenginleőmesine katkıda bulundu.

Saygılarımla

**UYUMLU KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK VE
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**
(Yüksek Lisans Tezi)

Furkan Muzaffer ÇELİK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2024

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde genel bir literatür taraması ve bazı temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılacak materyal ve yöntemler verilmiştir. Üçüncü bölümde yeni genelleştirilmiş (3+1)-boyutlu Boussinesq tipi integrallenebilir dalga denklemi, (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan Boussinesq denklemi ve genişletilmiş (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan evrim denklemi anlatılmıştır. Daha sonra ilk olarak yeni genelleştirilmiş (3+1)-boyutlu Boussinesq tipi integrallenebilir dalga denklemi için analitik çözüm yöntemleri olan Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı ve Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemleri uygulamaları verilmiştir. İkinci olarak ise (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan Boussinesq denklemi için analitik çözüm yöntemleri olan Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı yöntemi uygulamaları verilmiştir. Son olarak ise genişletilmiş (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan evrim denklemi için analitik çözüm yöntemi olan Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı ve Değiştirilmiş Genişletilmiş tanh fonksiyonu yöntemleri ve nümerik çözüm yöntemi olan Rezidual Kuvvet Serisi yöntemi (RKSYS) uygulamaları verilmiştir. Ayrıca elde edilen bazı çözümlerin 3D, kontur ve 2D grafikleri çizilmiştir. Ek olarak belirli parametreler için mevcut denklemin nümerik çözümleri ile analitik çözümleri arasında bir karşılaştırma tablosu da sunulmuştur. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -Açılımı Yöntemi, Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi, Değiştirilmiş Genişletilmiş Tanh Fonksiyonu Yöntemi, Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi, Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklem, Analitik Çözüm, Nümerik Çözüm.*

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

Sayfa Adeti: 62

**ANALYTICAL AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF COMPATIBLE
FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**

(Master Thesis)

Furkan Muzaffer ÇELİK

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

June 2024

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first section, a general literature review and some basic concepts are given. In the second chapter, the materials and methods to be used in the thesis are given. In the third chapter, the new generalised (3+1)-dimensional Boussinesq type integrable wave equation, the (2+1)-dimensional nonlinear Boussinesq equation and the extended (2+1)-dimensional nonlinear Evolution equation are described. Then, firstly, the applications of the Extended Exponential $(-\varphi(\xi))$ -expansion and Modified Generalised Kudryashov methods, which are analytical solution methods for the new generalised (3+1)-dimensional Boussinesq type integrable wave equation, are given. Secondly, applications of the Extended Exponential $(-\varphi(\xi))$ -expansion method for the (2+1)-dimensional nonlinear Boussinesq equation are given. Finally, applications of the Extended Exponential $(-\varphi(\xi))$ -expansion and Modified Extended tanh function methods, which are analytical solution methods for the extended (2+1)-dimensional nonlinear Evolution equation, and the Residual Power Series method (RKS), which is a numerical solution method, are given. In addition, 3D, contour and 2D graphs of some of the obtained solutions are drawn. In addition, a comparison table between numerical and analytical solutions of the present equation for certain parameters is presented. In the fourth chapter, results and discussions are given.

Keywords: Extended Exponential $(-\varphi(\xi))$ -Expansion Method, Modified Generalized Kudryashov Method, Modified Extended Tanh Function Method, Residual Power Series Method, Fractional Partial Differential Equation, Analytical Solutions, Numerical Solutions.

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet ŞENOL

Page Number: 62

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
1.1. Temel Kavramlar	3
1.1.1. Gama Fonksiyonu	3
1.1.2. Beta Fonksiyonu	4
1.1.3. Riemann-Liouville Kesirli İntegrali	4
1.1.4. Riemann-Liouville Kesirli Türevi	5
1.1.5. Caputo Kesirli Türevi	5
2. BÖLÜM	
MATERYAL VE YÖNTEMLER	6
2.1. Uyumlu Kesirli Türev Yaklaşımı	6
2.2. Homojen Denge Prensibi	7
2.3. Analitik Çözüm Yöntemleri	7
2.3.1. Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -Açılım Yöntemi	7
2.3.2. Değiştirilmiş Genişletilmiş tanh Fonksiyonu Yöntemi	9
2.3.3. Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi	11
2.4. Nümerik Çözüm Yöntemleri	12
2.4.1. Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi (RKSİY)	13
3. BÖLÜM	
UYGULAMALAR	15
3.1. Yeni Genelleştirilmiş (3+1)-Boyutlu Boussinesq Tipi İntegrallenebilir Dalga Denklemleri	15
3.1.1. Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -Açılım Yöntemi ile Analitik Çözümler	16

3.1.2. Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi ile Analitik Çözümler	24
3.2. (2+1)-Boyutlu Doğrusal Olmayan Boussinesq Denklemi	30
3.2.1. Genişletilmiş Üstel ($-\varphi(\xi)$)-Açılım Yöntemi ile Analitik Çözüm	31
3.3. Genişletilmiş (2+1)-Boyutlu Doğrusal Olmayan Evrim Denklemi (DOED)	39
3.3.1. Genişletilmiş Üstel ($-\varphi(\xi)$)-Açılım Yöntemi ile Analitik Çözüm	40
3.3.2. Değiştirilmiş Genişletilmiş tanh Fonksiyonu Yöntemi ile Analitik Çözüm	44
3.3.3. Rezidual Kuvvet Serisi ile Nümerik Çözüm	50
4. BÖLÜM	
SONUÇ VE ÖNERİLER	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİř	62

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 3.1. Farklı θ değerleri için (3.133) denkleminin nümerik çözümü, analitik çözümü ve bu iki çözümün karşılaştırılması sonucunda oluşan mutlak hatanın değerleri tablosu	53
---	----



ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 3.1. (3.16) denkleminde elde edilen $u_{2,1}(x, y, z, t)$ nin $m = 0.2, k = -0.5, l = 0.03, d = 0.1, a_1 = -1, a_2 = 4, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, z = 0.5, h = 0.1, \eta = 0.05, \lambda = 0.5, a = 0.05, \alpha = 0.021, \beta = 0.024, \theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği 23
- Şekil 3.2. (3.22) denkleminde elde edilen $u_{3,1}(x, y, z, t)$ nin $m = 0.24, k = 0.5, l = 0.03, d = 0.1, a_1 = -1, a_2 = 4, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, z = 0.5, h = 0.1, \eta = 0.05, \lambda = 0.5, a = 0.05, \alpha = 0.021, \beta = 0.024, \theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği 24
- Şekil 3.3. (3.37) denkleminde elde edilen $u_{5,2}(x, y, z, t)$ nin $m = -0.99, k = -0.5, l = 0.03, d = 0.1, a_1 = -1, a_2 = -4, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, z = 0.5, h = 0.1, a = 0.05, \alpha = \beta = 0.02, \delta = 2, \tau = 0.4, \theta = 0.98$ ve $t = 0.9$ değerleri için analitik çözüm grafiği 29
- Şekil 3.4. (3.41) denkleminde elde edilen $u_{6,2}(x, y, z, t)$ nin $m = -0.15, k = 0.2, l = 0.03, d = 0.1, a_1 = -1, a_2 = -2, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, z = 0.5, h = 0.1, a = 0.05, \alpha = \beta = 0.02, \delta = 2, \sigma = 0.5, \tau = 1, \theta = 0.98$ ve $t = 0.9$ değerleri için analitik çözüm grafiği 30
- Şekil 3.5. (3.63) denkleminde elde edilen $u_{10,1}(x, y, z, t)$ nin $\beta = 0.24, \chi = -0.5, A = 0.03, d = 0.1, a_1 = -1, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, h = 0.1, \eta = 0.05, \lambda = 0.5, a = 0.05, a_2 = -4, \theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği 38
- Şekil 3.6. (3.75) denkleminde elde edilen $u_{12,1}(x, y, z, t)$ nin $\beta = 0.9, \chi = -0.5, A = 0.03, d = 0.1, a_1 = -1, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, h = 0.1, \eta = 0.05, \lambda = 0.5, a = 0.05, a_2 = -4, \theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği 39
- Şekil 3.7. (3.86) denkleminde elde edilen $u_{13,1}(x, y, t)$ nin $k = 0.2, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, z = 0.5, h = 0.1, \eta = 0.05, \lambda = 0.5, d = 0.1, l = 0.5, a = 0.1, A = 0.1, \theta = 0.95$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği 43
- Şekil 3.8. (3.92) denkleminde elde edilen $u_{14,1}(x, y, t)$ nin $k = 0.99, c = 0.009, b = 0.01, y = 0.1, z = 0.5, h = 0.1, \eta = 0.05, \lambda = 0.5, d = 0.1, l = 0.5, a = 0.01, A = 0.1, \theta = 0.95$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği 44
- Şekil 3.9. (3.106) denkleminde elde edilen $u_{16,1}(x, y, t)$ nin $d = 0.05, y = 0.55, k = 0.202, b = 0.001, c = 0.0001, \sigma = -1.21, l = 0.45, a = 0.221, A = -1.01, \theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği 49

- Şekil 3.10. (3.112) denklemde elde edilen $u_{17,1}(x, y, t)$ nin $d = 0.05$, $y = 0.55$, $k = 0.202$, $c = 0.0001$, $b = 0.001$, $\sigma = -1.21$, $l = 0.45$, $a = 0.221$, $A = -1.01$, $\theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği 50
- Şekil 3.11. (3.133) denklemde elde edilen $u_3(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.75$ değerleri için nümerik çözüm grafiği 54
- Şekil 3.12. (3.106) denklemde elde edilen $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.75$ değerleri için analitik çözüm grafiği 54
- Şekil 3.13. (3.133) ve (3.106) denklemlerinde elde edilen $u_3(x, y, t)$ ve $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $y = 1$, $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.75$ değerlerine göre mutlak hata grafiği 54
- Şekil 3.14. (3.133) denklemde elde edilen $u_3(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.85$ değerleri için nümerik çözüm grafiği 55
- Şekil 3.15. (3.106) denklemde elde edilen $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.85$ değerleri için analitik çözüm grafiği 55
- Şekil 3.16. (3.133) ve (3.106) denklemlerinde elde edilen $u_3(x, y, t)$ ve $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $y = 1$, $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.85$ değerlerine göre mutlak hata grafiği 55
- Şekil 3.17. (3.133) denklemde elde edilen $u_3(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.95$ değerleri için nümerik çözüm grafiği 56
- Şekil 3.18. (3.106) denklemde elde edilen $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.95$ değerleri için analitik çözüm grafiği 56
- Şekil 3.19. (3.133) ve (3.106) denklemlerinde elde edilen $u_3(x, y, t)$ ve $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $y = 1$, $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.95$ değerlerine göre mutlak hata grafiği 56

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

- \mathbb{R} : Reel sayılar kümesi
 D_t^θ : Uyumlu (Conformable) Kesirli Türev Operatörü
 Γ : Gama Fonksiyonu
 β : Beta fonksiyonu
RKSY : Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi
KDE : Kesirli Diferansiyel Denklem



1. BÖLÜM

GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, matematik tarihinde kökleri antik çağlara kadar uzanan önemli bir araştırma alanıdır. Bu denklemlerin temelleri, özellikle geometrik problemleri ele almak için kullanıldığı bilinen Yunan matematikçiler tarafından atılmıştır. Antik Yunan bilginleri, geometrik problemleri çözmek için temel diferansiyel denklemleri bir araç olarak kullanmışlardır. Özellikle, eğriler boyunca ilerleyen dalgaların hareketini incelemek için diferansiyel denklemleri kullanmışlardır. Bu buluşlar, matematik ve bilim tarihinde büyük bir dönüm noktası olmuştur [1].

17. yüzyılda, modern diferansiyel denklemler teorisine doğru önemli bir değişim başlamıştır. Bu dönemde, Gottfried Wilhelm Leibniz ve Isaac Newton gibi önde gelen matematikçiler, integral ve diferansiyel hesabın temellerini oluşturmuştur. Newton, klasik mekanikte önemli bir ilerleme sağlamak amacıyla hareket yasalarını diferansiyel denklemler kullanarak ifade etmiştir.

Sonraki dönemlerde, özellikle 18. ve 19. yüzyıllarda, matematikçiler diferansiyel denklemler teorisini derinleştirmişlerdir. Bu dönemlerde, diferansiyel denklemler alanındaki araştırmalar ve keşifler, matematiğin ve bilimin genel gelişimine önemli katkılarda bulunmuştur. Joseph Fourier, Carl Friedrich Gauss ve Pierre-Simon Laplace gibi matematikçiler, diferansiyel denklemler alanında çağlarının önde gelen isimlerinden birkaçıdır ve bu alanda önemli katkılarda bulunmuşlardır. Bu isimler, teorik ve uygulamalı çalışmalarlarıyla diferansiyel denklemler alanında kalıcı izler bırakmış ve matematiğin ilerlemesine büyük katkılarda bulunmuşlardır.

20. yüzyıl boyunca, diferansiyel denklemler teorisi önemli ölçüde gelişmiştir ve birçok alt alanı doğurmuştur. Örneğin, kısmi diferansiyel denklemler, diferansiyel denklemler teorisi alanında önemli bir ilerleme kaynağı olmuştur. Özellikle kontrol teorisi, kaotik sistemler ve dinamik sistemler gibi alanlarda [1] önemli çalışmalara imza atılmıştır. Böylece, diferansiyel denklemlerin kavramsal çerçevesi, matematiksel düşüncenin yörüngesinde önemli bir konuma yükselmiş ve çeşitli uygulama alanlarında güçlü bir araç olarak kendini göstermiştir. Bu denklemler, fizikten mühendisliğe, biyolojiden ekonomiye kadar birçok alanda problemleri modellemek ve çözmek için kullanılmaktadır. Bu şekilde, diferansiyel denklemler, modern bilimin temel taşlarından biri haline gelmiştir.

Adi diferansiyel denklemler, tek bir bağımsız değişkene göre türevlerin dahil edilmesiyle

karakterize edilir ve öncelikle tek boyut üzerinde gelişen modelleme sistemlerinde kullanılır. Buna karşılık, kısmi diferansiyel denklemler, birden fazla bağımsız değişkene göre türevleri kapsar ve bu nedenle çok boyutlu sistemleri temsil etmeye daha uygundur. Sonuç olarak, kısmi diferansiyel denklemler, daha karmaşık ve çeşitli olayları modelleyebildikleri için adi diferansiyel denklemlere kıyasla daha geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir [2].

Kısmi diferansiyel denklemler, doğal olayların ve fiziksel süreçlerin daha gerçekçi bir şekilde anlaşılmasında önemli bir rol oynar. Bu denklemler, ısı dağılımı, elektromanyetik alanlar, akışkanlar dinamiği ve kuantum mekaniği gibi çeşitli alanlardaki sayısız fiziksel olgunun tanımlanmasında temel teşkil eder. Isı transferi problemleri, malzeme işleme ve hava akışı modellemesi gibi birçok uygulama, altta yatan dinamikleri doğru bir şekilde temsil etmek için kısmi diferansiyel denklemlerin kullanılmasını gerektirir [3–5].

Kısmi diferansiyel denklemler, karmaşık sistemlerin analizi, tahmini ve kontrolü için kritik öneme sahiptir. Bu denklemlerin çözümleri, gelecekteki sistem davranışlarının tahmin edilmesini ve optimizasyonunu sağlar. Kısmi diferansiyel denklemlerin hem analitik hem de nümerik çözümleri, fiziksel simülasyonlarda, mühendislik tasarımlarında, hava tahminlerinde ve diğer birçok uygulamada yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çözümler, karmaşık sistemlerin davranışlarını anlamak ve gerektiğinde müdahale etmek için sağlam bir çerçeve sunar. Sonuç olarak, kısmi diferansiyel denklemler, modern teknolojinin gelişmesinde ve ilerlemesinde temel bir bileşen olarak öne çıkmaktadır [6, 7].

Dalga denklemleri, çeşitli disiplinlerdeki kritik uygulamalarıyla kısmi diferansiyel denklemler arasında önemli bir yere sahiptir. Doğal olayları, mühendislik problemleri ve fiziksel sistemleri modellemek için yaygın olarak kullanılan bu denklemler, dalga hareketlerinin hem zaman hem de uzayda yayılımını tanımlar. Dalga denklemleri, çok sayıda fiziksel sistemde karşılaşılan sorunların çözümünde büyük önem taşır. Bireysel, lokalize dalgalar olan solitonlar, birçok dalga bağlamında dikkate değer bir olgudur. Okyanus dalgalarından optik fiberlere kadar çeşitli uygulamalarda gözlemlenen solitonlar, ayırt edici özelliklerinden dolayı büyük ilgi görmüştür. Solitonların en büyüleyici özelliklerinden biri, diğer dalgalarla etkileşime girmeksizin şekillerini ve hızlarını koruyabilmeleridir. Bu özellikler, solitonları bilgi iletimi, veri depolama ve doğrusal olmayan etkileşimlerin modellenmesi gibi uygulamalar için değerli kılmaktadır [8].

Gerçek hayattaki problemlerin matematiksel modellerinden türetilen adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini araştırmak, uzun süredir matematikçiler ve araştırmacıların odak noktası olmuştur. Bu çözümleri bulma süreci, sistem davranışlarını anlamak, tahmin etmek ve kontrol etmek için gereklidir. Bu denklemlerin çözümleri, sistemin kararlılık, denge, süreklilik, salınımlar ve dalgalanmalar gibi kritik özelliklerini

ortaya çıkarır. Bu bilgiler, matematiksel modellerin pratik problemlere uygulanması açısından büyük öneme sahiptir. Sonuç olarak, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesi, matematiksel modelleme ve uygulamalı matematik alanlarında temel bir rol oynar ve gerçek dünyadaki sorunların çözümüne önemli katkılar sunar.

Denklemlerin çözümlerinin aranmasında hem analitik hem de nümerik yöntemler kullanılır. Denklemleri kesin olarak çözmek ve tam çözümler elde etmek için analitik yöntemler kullanılır. Bu yaklaşım, denklemlerin doğasında bulunan matematiksel özelliklerin derinlemesine anlaşılmasını kolaylaştırır ve sistem davranışının açık bir şekilde ifade edilmesini sağlar. Tersine, nümerik yöntemler denklemlerin yaklaşık çözümlerini hesaplamak için bilgisayar tabanlı tekniklerden yararlanır. Bu yöntemler, karmaşık sorunları pragmatik bir şekilde ele almak için yaygın olarak uygulanır. Böylece analitik ve nümerik yöntemlerin bir arada kullanılması, matematiksel modellemeye daha kapsamlı ve etkili bir yaklaşım sunar.

Literatürde, dalga denklemleri gibi problemlerin çözümü için birçok yöntem mevcuttur; ancak bu yöntemlerin seçimi, problemin spesifik özelliklerine ve çözüm sürecinin doğasında bulunan karmaşıklıklara bağlıdır. Bu yöntemlerin etkinliği, problemin özellikleri ve çözümün istenen niteliği gibi faktörlere bağlıdır. Her bir yöntemin, belirli bir problem alanında veya çözüm gereksiniminde daha uygun olduğu durumlar vardır. Dolayısıyla, çözüm yaklaşımlarının çeşitliliği, farklı problemlerin ve uygulamaların etkili bir şekilde ele alınmasını sağlar. Bu çeşitlilik, araştırmacıların ve uygulayıcıların belirli bir problemi çözmek için en uygun yöntemi seçmelerine olanak tanır. Bu yöntemlerden bazıları, G' -açılım yöntemi [9, 10], Sardar alt denklem yöntemi [11], değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon yöntemi [12, 13], değiştirilmiş exp fonksiyon yöntemi [14–18], F-açılım yöntemi [19, 20], Kudryashov yöntemi [21], Modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi [22] şeklinde sıralanabilir.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde, sonraki adımlarda kullanılacak olan çeşitli özel fonksiyonlar, türev ve integral kavramları tanıtılacaktır.

1.1.1. Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu, Leonard Euler tarafından 1729 yılında ortaya konulmuştur. Bu fonksiyon, pozitif bir tam sayı olan y için Euler integrali ile tanımlanır. Euler integrali, genellikle Γ ile gösterilen ve aşağıdaki gibi tanımlanan bir fonksiyondur [23]:

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{y-1} dt, \quad y > 0 \quad (1.2)$$

Bu genelleştirilmiş integral ile tanımlanan Gama fonksiyonu, bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da adlandırılır.

Gama fonksiyonunun bazı özellikleri şunlardır:

1. $y > 0$ için $\Gamma(y + 1) = y\Gamma(y)$ olup bu, fonksiyonun rekürans ilişkisini sağlar.
2. $\Gamma(y) = (y - 1)!$ olup, burada y bir pozitif tamsayıdır.
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olup, bu Gama fonksiyonunun özel bir değeridir.

Özellikle, $\Gamma(y) = (y - 1)!$ eşitliği faktöriyel fonksiyonun Gama fonksiyonuna özdeş olması nedeniyle ortaya çıkar.

Gama fonksiyonunun çok çeşitli uygulamaları vardır, özellikle olasılık dağılımları ve integral hesaplamaları alanında önemlidir.

1.1.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu, Euler integralleri olarak da bilinen belirli integral sınıfının bir parçasıdır. Bu integral türü, 18. yüzyılın sonlarında Leonhard Euler tarafından çalışılmıştır. Euler, beta fonksiyonunu integral ifadelerle ifade etti ve bu integralin özelliklerini incelemiştir.

Matematiksel olarak, Beta fonksiyonu [24] şu şekilde tanımlanır:

$$\beta(y, z) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{z-1} dt, \quad y > 0, \quad z > 0 \quad (1.3)$$

Beta fonksiyonunun bazı özellikleri şunlardır:

1. $\beta(y, z) = \beta(z, y)$ olup, bu fonksiyonun simetrisini ifade eder.
2. $\beta(y, z) = \frac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}$ olup, bu Gama fonksiyonu ile ilişkisini gösterir.
3. $\beta(y, z) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2y-1} (\cos \theta)^{2z-1} d\theta$ olarak ifade edilebilir.
4. $\beta(y, z) = \frac{1}{z-1} \int_0^\infty \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{y+z}} dt$ olarak da ifade edilebilir.

Beta fonksiyonu, özellikle olasılık dağılımlarında ve istatistiksel analizlerde kullanılır.

1.1.3. Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

Riemann-Liouville kesirli integrali, 19. yüzyıl matematikçileri Bernhard Riemann ve Joseph Liouville'un çalışmalarıyla isimlendirilmiştir. Riemann-Liouville kesirli integrali, belirli bir tür integraldir. Genellikle, zaman ölçeği (time scale) adı verilen bir doğrusal düzlemde tanımlanan ve kesirli mertebeden türevlerin ve integralin genelleştirilmiş versiyonlarının teorisinin temelini oluşturur.

$\alpha \geq 0$ ve $a \geq 0$ olmak üzere $I_a^\alpha F(y)$ 'nin Riemann-Liouville kesirli integrali [25]

$$I_a^\alpha f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^y (y-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Riemann-Liouville kesirli integrali, kesirli mertebeden integral hesaplamalarında, diferansiyel denklemler teorisinde, sinyal işleme ve stokastik süreçler gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu integral, kesirli mertebeden türevlerin ve integralin teorik ve uygulamalı araştırmalarında önemli bir rol oynamaktadır.

1.1.4. Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Riemann-Liouville kesirli türevi, adını matematikçiler Bernhard Riemann ve Joseph Liouville'den almıştır. İlk olarak, Riemann integralinin geliştirilmesi ve ardından Liouville'un katkıları ile bu türev konusu şekillenmiştir.

$t > \alpha$ olmak üzere $D_t^\alpha f(t)$ 'nin Riemann-Liouville kesirli türevi [26]

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^k \int_\alpha^t \frac{f(s) ds}{(t-s)^{\alpha-k+1}}, \quad k-1 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu türev, kesirli mertebeden türevlerin matematiksel bir genelleştirmesini sunar ve karmaşık analiz, olasılık teorisi, fizik, mühendislik ve diğer birçok bilimsel alanlarda yaygın olarak kullanılır. Özellikle, zaman serileri analizi, dalga denklemleri, difüzyon problemleri ve stokastik süreçlerin modelleme ve çözümleme süreçlerinde önemli bir rol oynar.

1.1.5. Caputo Kesirli Türevi

Caputo kesirli türevi, kesirli mertebeden türevlerin bir türüdür ve diferansiyel denklemler teorisinde, zaman serilerinin analizinde ve diğer matematiksel modelleme alanlarında önemli bir role sahiptir. $\alpha > 0$ olmak üzere, bir fonksiyonun Caputo kesirli türevi, türev alınan fonksiyonun bazı türevlerini alıp ardından bir integral işlemi uygulayarak tanımlanır.

Caputo kesirli türevi [27], ${}^C D_t^\alpha f(t)$ sembolü ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^t \frac{f^k(s) ds}{(t-s)^{\alpha-k+1}}, \quad k-1 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.6)$$

Caputo kesirli türevi, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözümünde önemli bir araç olarak kabul edilir ve matematiksel modelleme alanında geniş bir uygulama alanına sahiptir.

2. BÖLÜM

MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu bölümde, uygulanan uyumlu kesirli türev yaklaşımı ile homojen denge prensibine vurgu yapılmıştır. Ardından, Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ açılımı, Değiştirilmiş Genişletilmiş tanh Fonksiyonu, Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov ve Rezidual Kuvvet Serisi yöntemlerinin tanımları sunulmuştur.

2.1. Uyumlu Kesirli Türev Yaklaşımı

Bu bölümde, uyumlu kesirli türev tanımının [28] sunulmasını takiben, uyumlu kesirli türev yaklaşımının çeşitli özellikleri ele alınmıştır.

Tanım 2.1.1. $\rho : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t > 0$, $\theta \in (0, 1)$ olmak üzere θ -inci mertebeden bir ρ fonksiyonunun uyumlu kesirli mertebeden türev yaklaşımı,

$$D_t^\theta(\rho(t)) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\rho(t + \kappa t^{1-\theta}) - \rho(t)}{\kappa} \quad (2.3)$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. $\theta \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için, ρ_1 ve ρ_2 fonksiyonları θ -inci mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilir fonksiyonlardır. Bu türev tanımı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $D_t^\theta(t^{s_1}) = s_1 t^{s_1-\theta}$, $s_1 \in \mathbb{R}$
- $D_t^\theta(s_1 \rho_1 + s_2 \rho_2) = s_1 D_t^\theta(\rho_1) + s_2 D_t^\theta(\rho_2)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$
- $D_t^\theta\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \frac{\rho_2 \cdot D_t^\theta(\rho_1) - \rho_1 \cdot D_t^\theta(\rho_2)}{\rho_2^2}$
- $D_t^\theta(\rho_1 \cdot \rho_2) = \rho_1 \cdot D_t^\theta(\rho_2) + \rho_2 \cdot D_t^\theta(\rho_1)$
- $D_t^\theta(\rho_1)(t) = t^{1-\theta} \frac{d\rho_1(t)}{dt}$
- $D_t^\theta(C) = 0$, C sabit.

Tanım 2.1.2. n değişkenli bir fonksiyon olan $\rho(y_1, y_2, \dots, y_n)$ olarak tanımlanırsa ve $\theta \in (0, 1)$ aralığında ρ nun y_n değişkenleri cinsinden kısmi türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir [29],

$$\frac{d^\theta}{dy_i^\theta} \rho(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\rho(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i + \kappa y_i^{1-\theta}, y_n) - \rho(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\kappa}$$

2.2. Homojen Denge Prensibi

Homojen denge sayısı, tam çözümün toplam sayısının üst sınırını belirtir. Lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında bir sabit elde edilir.

Bir adi diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden lineer terimi $\frac{d^r u}{d\varepsilon^r}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terimi $u^t \left(\frac{d^m u}{d\varepsilon^m}\right)^n$ olarak verilsin. $u = \tau^s$ dönüşümü yapıldığında, t, m, n, r pozitif tam sayılar ve s homojen denge sayısı olmak üzere, homojen denge bağıntısı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$s + r = sr + n(s + m)$$

Bu denklem aracılığıyla, s nin pozitif homojen denge sayısı ifade edilir [30].

2.3. Analitik Çözüm Yöntemleri

Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemleri, nümerik çözüm yöntemlerine alternatif bir seçenek sunmaktadır. Nümerik çözüm yöntemleri, kesirli kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümlerini nümerik olarak hesaplar; fakat analitik çözüm yöntemleri, bu denklemlerin kesin çözümlerini sağlar. Analitik çözüm yöntemleri ayrıca karmaşık matematiksel modellerin analitik olarak çözümünü mümkün kılar, bu da daha derin bir anlayış ve öngörü sağlar. Bununla birlikte, analitik çözüm yöntemleri nümerik çözüm yöntemlerine göre daha hızlı ve daha az hesaplama gücü gerektirir.

2.3.1. Genişletilmiş Üstel ($-\varphi(\xi)$)-Açılım Yöntemi

Genişletilmiş üstel ($-\varphi(\xi)$) açılım yöntemi, geniş bir uygulanabilirlik spektrumuna sahip olan etkili bir matematiksel araçtır. Bu yöntem, matematiksel fizikteki birçok lineer olmayan denklemin çözümünü doğrudan ve etkili bir şekilde bulmada kullanılabilir. Seri açılım içeren bu yöntem, uygun katsayılara dayalı olarak çeşitli çözüm aileleri elde etme avantajı sağlar. Yöntemin genişletilmiş olması, başlangıçtaki sürümündeki bazı eksikliklerin giderildiğini ve yöntemin daha gelişmiş bir form kazandığını gösterir. Lineer olmayan kesirli türev içeren denklemlerin çözümüne yönelik olarak, genişletilmiş üstel ($-\varphi(\xi)$) açılım yöntemi [31–33], güçlü ve etkili bir matematiksel çözümleme aracı olarak kabul edilir. Temel adımları şu şekilde gösterilebilir:

u çözüm fonksiyonu için; $D_t^\alpha u, D_{x_1}^\alpha u, D_{x_2}^\alpha u, \dots, D_{x_m}^\alpha u$ operatörleri, t, x_1, x_2, \dots, x_m değişkenlerine göre uyumlu kesirli türevlerini ifade etmektedir.

Adım 1. Lineer olmayan kesirli mertebeden türev içeren bir denklemin genel hali şu şekildedir:

$$F(D_t^\alpha u, D_{x_1}^\alpha u, D_{x_2}^\alpha u, \dots, D_{x_m}^\alpha u, D_t^{2\alpha} u) = 0 \quad (2.4)$$

Bu denklemin yürüyen dalga çözümlerini bulmak için, $c \neq 0$ ve $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m \neq 0$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t) = u(\xi), \quad \xi = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \dots + k_m x_m + c \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (2.5)$$

dalga dönüşümü kullanıldığında (2.4) denklemi, aşağıdaki gibi bir lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenir.

$$H(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), \dots) = 0 \quad (2.6)$$

Burada $u'(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi}$, H ise $u(\xi)$ yi ve türevlerini içeren bir polinomdur ve $u_\xi = \frac{du}{d\xi}$, $u_{\xi\xi} = \frac{d^2u}{d\xi^2}$ şeklinde devam eder.

Adım 2. (2.6) denklemi için varsayım yapılarak yürüyen dalga dönüşümlerinin aşağıdaki biçimde ifade edilebileceği kabul edilir:

$$u(\xi) = B_0 + \sum_{r=1}^N B_r (\exp(\xi(-\varphi)))^r, \quad B_N \neq 0 \quad (2.7)$$

Burada B_r ($0 \leq r \leq N$), $B_N \neq 0$ ve $\varphi = \varphi(\xi)$ aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlayan bir çözümdür:

$$\varphi'(\xi) = \exp(-\varphi(\xi)) + \eta \exp(\varphi(\xi)) + \lambda \quad (2.8)$$

(2.8) denkleminin çözüm aileleri aşağıdaki analitik çözümlere karşılık gelmektedir.

1. çözüm ailesi: $\eta \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\eta > 0$ olduğunda

$$u(\xi) = \frac{\ln \left(-\sqrt{(\lambda^2 - 4\eta)} \tanh \left(\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 4\eta)}}{2} (h + \xi) \right) - \lambda \right)}{2\eta} \quad (2.9)$$

2. çözüm ailesi: $\eta \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\eta < 0$ olduğunda

$$u(\xi) = \frac{\ln \left(\sqrt{(4\eta - \lambda^2)} \tanh \left(\frac{\sqrt{(4\eta - \lambda^2)}}{2} (h + \xi) \right) - \lambda \right)}{2\eta} \quad (2.10)$$

3. çözüm ailesi: $\lambda \neq 0, \eta = 0$ ve $\lambda^2 - 4\eta > 0$ olduğunda

$$u(\xi) = -\ln \left(\frac{\lambda}{\sinh(\lambda(h + \xi)) + \cosh(\lambda(h + \xi)) - 1} \right) \quad (2.11)$$

4. çözüm ailesi: $\lambda \neq 0, \eta \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\eta = 0$ olduğunda

$$u(\xi) = \ln \left(-\frac{2(\lambda(h + \xi) + 2)}{\lambda^2(h + \xi)} \right) \quad (2.12)$$

5. çözüm ailesi: $\lambda = 0, \eta = 0$ ve $\lambda^2 - 4\eta = 0$ olduğunda

$$u(\xi) = \ln(h + \xi) \quad (2.13)$$

$B_0, B_1, B_2, \dots, B_N$ ve h daha sonra belirlenecek olan sıfır olmayan sabitlerdir. Pozitif tam sayı N , denklemin en yüksek dereceden türevleri ile en yüksek dereceden doğrusal olmayan terimler arasındaki denge prensibi kullanılarak tanımlanabilir.

Adım 3. N nin farklı değerleri için çeşitli denklem biçimleri bulunabilir. (2.7) denklemini ve türevlerini (2.8) denkleminde yerine koyarak, $\exp(-\varphi(\xi))$ nin kuvvetlerini içeren bir polinom elde edebiliriz. $\exp(-\varphi(\xi))$ nin aynı kuvvetlerdeki tüm katsayılarını sıfıra eşitlersek, karşımıza cebirsel bir denklem sistemi çıkar. Bu sistemi Wolfram Mathematica kullanarak çözdüğümüzde, $B_0, B_1, B_2, \dots, B_N, h, \lambda$ ve η katsayılarının farklı değerleri elde edilir. Bu katsayıları, (2.9)-(2.13) arasında ifade edilen çözüm ailelerini dikkate alarak (2.7) denkleminde yerine koyarsak, ele alınan kısmi türevli diferansiyel denklemin farklı karakteristikte birçok analitik çözümünü elde edebiliriz.

2.3.2. Değiştirilmiş Genişletilmiş tanh Fonksiyonu Yöntemi

Bu bölümde değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyonu yönteminin çalışma algoritması incelenmiştir.

Wazwaz tarafından geliştirilen genişletilmiş tanh yöntemi [34–36], doğrudan ve etkili bir cebirsel yaklaşım olup, lineer olmayan denklemleri çözmek amacıyla tasarlanmıştır. Bu yöntem, aşağıda belirtilen çalışma prensiplerine dayanmaktadır.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi,

$$M(D_t^\theta u, D_x^\theta u, D_y^\theta u, D_x^{2\theta} u, D_y^{2\theta} u, \dots) = 0 \quad (2.14)$$

şeklinde verilsin. Burada $u = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon; M , u nun en yüksek mertebeden türevleri ve lineer olmayan terimleri içeren bir polinomdur.

$\varphi = \varphi(\xi)$ hiperbolik fonksiyonu, Riccati diferansiyel denklemini sağlar.

$$\varphi'(\xi) = \sigma + \varphi(\xi)^2 \quad (2.15)$$

Burada σ keyfi bir reel sayıdır.

Değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyonu yönteminde kullanılan temel adımlar aşağıdaki gibidir.

Adım 1. (2.14) denkleminin dalga dönüşümü

$$u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t) = u(\xi), \quad \xi = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \dots + k_nx_n + c\frac{t^\theta}{\theta} \quad (2.16)$$

şeklinde verilsin. Burada k_1, k_2, \dots, k_n, c keyfi sabitlerdir. Ayrıca $k_1, k_2, \dots, k_n, c \neq 0$ dır. (2.14) ile verilen denkleme (2.16) ile verilen dalga dönüşümü uygulanırsa (2.14) kısmi diferansiyel denklemi,

$$R(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), \dots) = 0 \quad (2.17)$$

eşitliğindeki gibi lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. R, ξ ye bağlı tüm türevleri içeren bir polinomdur.

Adım 2. N dengeleme sayısı, denge prensibi kullanılarak belirlenir. Yani, (2.17) denklemindeki en yüksek mertebeden terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimin dengelemesi yoluyla hesaplanır.

Adım 3. (2.17) denkleminin genel çözümü, aşağıdaki gibi bir sonlu seri olarak kabul edilir.

$$u(\xi) = A_0 + \sum_{r=1}^N (A_r\phi^r(\xi) + B_r\phi^{-r}(\xi)) \quad (2.18)$$

Burada A_r ve B_r daha sonra hesaplanacak sabitlerdir. Ayrıca $\phi(\xi)$ (2.15) denklemini sağlar.

Adım 4. (2.18) denklemi, (2.17) denkleminde yerine konulduğunda $\phi(\xi)$ fonksiyonunun aynı kuvvetlere sahip tüm terimleri bir araya getirilir ve $A_r, B_r, r = 1, 2, \dots, N$ ve c katsayıları için bir denklem sistemi oluşturulur. Bu sistemi çözerek belirsiz katsayıların değerlerini elde edilir.

Adım 5. (2.14) denkleminin tam çözümlerini elde etmek için $A_r, B_r, r = 1, 2, \dots, N$ ve c katsayılarını (2.18) denkleminde yerine koyarız. Bu çözümler üç farklı formda elde edilir: trigonometrik, rasyonel ve hiperbolik. Bu, logaritmik fonksiyonların yanı sıra trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların çözümlerini içerir.

(2.15) denklemi aşağıdaki durumlara göre üç farklı tipte çözüme sahiptir.

Durum 1. $\sigma < 0$ ise (2.15) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}\xi) \quad (2.19)$$

veya

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}\xi) \quad (2.20)$$

Durum 2. $\sigma > 0$ ise (2.15) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$\varphi(\xi) = \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma}\xi) \quad (2.21)$$

veya

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma}\xi) \quad (2.22)$$

Durum 3. $\sigma = 0$ ise (2.15) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\xi} \quad (2.23)$$

2.3.3. Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi

Bu bölümde değiştirilmiş genelleştirilmiş Kudryashov yönteminin çalışma algoritması incelenmiştir.

Nikolay A. Kudryashov'un yedinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etme amacıyla literatüre sunduğu Kudryashov yönteminin genişletilmiş versiyonu olan değiştirilmiş genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi [37], aşağıda dört adımda açıklanan bir algoritma ile incelenebilir.

Adım 1. Lineer olmayan kesirli mertebeden türev içeren denklemin genel hali şu şekildedir:

$$S(D_t^\alpha u, D_x^\alpha u, D_y^\alpha u, D_x^{2\alpha} u, D_y^{2\alpha} u, \dots) = 0 \quad (2.24)$$

(2.24) denkleminin dalga dönüşümü

$$u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t) = u(\xi), \quad \xi = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \dots + k_n x_n + c \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (2.25)$$

şeklinde verilsin. Burada $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, c$ keyfi sabitlerdir. Ayrıca $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, c \neq 0$ 'dır. (2.24) ile verilen denkleme (2.25) ile verilen dalga dönüşümü uygulanırsa (2.24) kısmi diferansiyel denklemi,

$$T(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), \dots) = 0 \quad (2.26)$$

eşitliğindeki gibi lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. T , ξ ye bağlı tüm türevleri içeren bir polinomdur.

Adım 2. (2.26) denkleminin genel çözümü, aşağıdaki gibi bir sonlu seri olarak kabul edilir.

$$u(\xi) = \sum_{r=0}^N \frac{b_r}{(1 + Q(\xi))^r} \quad (2.27)$$

burada b_r , ($r = 0, 1, \dots, N$) $b_N \neq 0$ olacak şekilde aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlayan bir çözümdür:

$$Q'(\xi) = \sigma + \delta Q(\xi) + \tau Q(\xi)^2 \quad (2.28)$$

burada σ , δ ve τ daha sonra belirlenecek sabitlerdir.

Adım 3. (2.28) denklemi aşağıdaki durumlara göre üç farklı tipte çözüme sahiptir.

Durum 1. $\tau \neq 0$ ise (2.28) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$Q(\xi) = \frac{\sqrt{4\tau\sigma - \delta^2} \tan\left(\frac{1}{2}(d + \xi)\sqrt{4\tau\sigma - \delta^2}\right) - \delta}{2\tau} \quad (2.29)$$

Durum 2. $\delta \neq 0$ ve $\sigma = 0$ ise (2.28) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$Q(\xi) = -\frac{\delta e^{\delta(d+\xi)}}{\tau e^{\delta(d+\xi)} - 1} \quad (2.30)$$

Durum 3. $\delta \neq 0$ ve $\tau = 0$ ise (2.28) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$Q(\xi) = \frac{e^{\delta(d+\xi)}}{\delta} - \frac{\sigma}{\delta} \quad (2.31)$$

Adım 4. (2.26) denklemi dengeleme prensibi kullanılarak $N \in \mathbb{Z}^+$ belirlenmesi, en yüksek dereceli türevler ile doğrusal olmayan değişkenler arasında denge prensibinin uygulanmasını içermektedir. Ardından (2.27) denklemi ile birlikte (2.29), (2.30) ve (2.31) denklemlerini (2.26) denkleminde yerine koyarak $Q^i(\xi)$ $r = 0, 1, 2, \dots$ kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek b_r ($r = 0, 1, \dots, N$), k ve c parametrelerini içeren bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Sonrasında, (2.26) denkleminin analitik çözümü, bulunan b_r ($r = 0, 1, \dots, N$), k ve c değerlerinin (2.27) denkleminde yerine konulmasıyla elde edilir.

2.4. Nümerik Çözüm Yöntemleri

Nümerik çözüm yöntemleri, matematiksel problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak amacıyla kullanılan tekniklerdir. Bu teknikler, türev, integral, denklem çözme, lineer cebir problemleri gibi çeşitli matematiksel problemleri çözmek için uygulanabilir. Nümerik çözüm yöntemleri, problemlere bilgisayarlar aracılığıyla iteratif yaklaşımlar kullanarak yaklaşımlar ve genellikle yaklaşık çözümler üretirler.

2.4.1. Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi (RKSY)

RKSY, nümerik çözüm yöntemleri arasında kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem, diferansiyel denklemlerin çözümü için bir yaklaşım sunar. Bir diferansiyel denklem genellikle bir başlangıç değeri kullanılarak bir kuvvet serisi olarak ifade edilir. Daha sonra bu kuvvet serisi, orijinal denklemde yerine konur ve kalan terimlerin ihmal edilebilir derecede küçük olduğu varsayılır. Bu yöntemle, bir nümerik çözüm elde edilir. Nümerik çözüm yöntemleri, genellikle analitik çözümün zor olduğu durumlarda tercih edilir. RKSY, bu tür yöntemlerden biridir.

RKSY [38] algoritmasını tanıtmak için, aşağıdaki gibi doğrusal olmayan bir kesirli diferansiyel denklem düşünülmelidir.

$$D_t^{n\theta} u(x, t) + L[x]u(x, t) + G[x]u(x, t) = q(x, t) \quad (2.32)$$

$t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n - 1 < n\theta \leq n$, $L[x]$ lineer bir operatördür ve $G[x]$ lineer olmayan bir operatördür. RKSY ile,

$$u(x, 0) = f_0(x) = f(x) \quad (2.33)$$

başlangıç koşulu $t = 0$ için kesirli kuvvet serisinin açılımı hesaplanabilir ve aşağıdaki gibidir,

$$f_{n-1}(x) = D_t^{(n-1)\theta} u(x, 0) = q(x) \quad (2.34)$$

Ayrıca, bu çözümün açılım formu şu şekildedir:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\theta}}{\theta^n n!}, \quad 0 < \theta \leq 1, \quad 0 \leq t < \mathbb{R} \quad (2.35)$$

Bu adımda, $u(x, t)$ fonksiyonunun k -ıncı kesik serisini temsil eden $u_k(x, t)$,

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\theta}}{\theta^n n!}, \quad 0 < \theta \leq 1, \quad 0 \leq t < \mathbb{R} \quad (2.36)$$

şeklinde ifade edilir. $k = 0$ için RKSY çözümü, $u_0(x, t) = f(x)$ olarak ifade edilir ve bu bilgiye dayanarak, $k = 1$ için RKSY nümerik çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1(x, t) = f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\theta}{\theta} \quad (2.37)$$

Eğer burada rezidual fonksiyonu (2.32) denklemiyle ilişkilendirirsek, elde edeceğimiz ifade şu şekildedir:

$$Resu(x, t) = D_t^{n\theta} u(x, t) + L[x]u(x, t) + G[x]u(x, t) - q(x, t) \quad (2.38)$$

k -ıncı rezidual fonksiyonu $Resu_k(x, t)$ ise,

$$Resu_k(x, t) = D_t^{n\theta} u_k(x, t) + L[x]u_k(x, t) + G[x]u_k(x, t) - q(x, t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.39)$$

formu elde edilir. $k = 1$ için, denklemin rezidual fonksiyonu $Resu_1(x, t)$ ifadesi elde edilir. Bu ifade $t = 0$ için $Resu_1(x, 0) = 0$ koşulunu sağladığında, $f_1(x)$ elde edilir. Bu ise, $u_1(x, t)$ için birinci RKSİY nümerik çözümünü elde etmemizi sağlar. Ardından, her adımda $k = 1, 2, 3, \dots$ için farklı $f_k(x)$ ifadeleri elde edilir. Bu yöntemle, kesirli kuvvet serileri kullanılarak, her adımda daha yakın bir yaklaşım elde edilerek daha hassas sonuçlara ulaşılabilir.



3. BÖLÜM

UYGULAMALAR

Bu bölümde, yeni geliştirilmiş (3+1)-boyutlu Boussinesq tipi integrallenebilir dalga denklemi, (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan Boussinesq denklemi ve genişletilmiş (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan evrim denklemi genel hatlarıyla anlatılmıştır. Daha sonra ilk olarak yeni geliştirilmiş (3+1)-boyutlu Boussinesq tipi integrallenebilir dalga denklemi için analitik çözüm yöntemleri olan Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı ve Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemleri uygulamaları verilmiştir. İkinci olarak ise (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan Boussinesq denklemi için analitik çözüm yöntemleri olan Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı yöntemi uygulamaları verilmiştir. Son olarak ise genişletilmiş (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan evrim denklemi için Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı, Değiştirilmiş Genişletilmiş tanh fonksiyonu yöntemleri ve RKSU uygulamaları verilmiştir.

3.1. Yeni Geliştirilmiş (3+1)-Boyutlu Boussinesq Tipi İntegrallenebilir Dalga Denklemi

Yeni geliştirilmiş (3+1)-boyutlu Boussinesq tipi integrallenebilir dalga denklemleri [39], fizik ve mühendislik gibi çeşitli bilimsel alanlarda karşılaşılan farklı dalga yapılarını tanımlamak için kullanılır. Bu denklemler hidrodinamik dalga yayılımı, optik fiberler, Rossby soliter dalgaları, haydut (rogue) dalgalar, elektro manyetik dalga denklemleri ve kuantum mekaniği gibi farklı fiziksel bağlamlarda ortaya çıkabilir.

$$u_{xt} + au_{xx} + b(u)_{xx}^2 + cu_{xxxx} + du_{yy} + a_1u_{yt} + a_2u_{tt} + \alpha u_{xy} + \beta u_{xz} = 0 \quad (3.4)$$

$u = u(x, y, z, t)$ dir. $a, b, c, d, a_1, a_2, \alpha$ ve β reel sabitlerdir.

Uygulamaya geçmeden önce, denklemin uyumlu kesirli türev versiyonu şu şekilde ifade edilir.

$$D_t^\theta u_x + au_{xx} + b(u)_{xx}^2 + cu_{xxxx} + du_{yy} + a_1D_t^\theta u_y + a_2D_t^{2\theta} u + \alpha u_{xy} + \beta u_{xz} = 0 \quad (3.5)$$

Burada $u(x, y, z, t) = u(\xi)$ ve $\xi = mx + ky + lz + \frac{t^\theta}{\theta}$ dönüşümleri yapılarak denklemin iki kez integral alınarak,

$$a_2f^2u + a_1fku + am^2u + bm^2u^2 + cm^4u'' + dk^2u + fmu + \alpha kmu + \beta lmu = 0 \quad (3.6)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu indirgeme sonucunda oluşan u'' ve u^2 terimleri arasında dengeleme yapılır. Dengeleme bağıntısı $N + 2 = 2N$ olarak yazılır

ve bu bağıntı çözüldüğünde dengeleme sayısı $N = 2$ olarak bulunur.

Şimdi bu sayı Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı ve Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemlerindeki kesik serilere uygulanacaktır.

3.1.1. Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -Açılım Yöntemi ile Analitik Çözümler

Buradan, $N = 2$ değeri (2.7) denkleminde yerine yazıldığında kesik seri şu şekilde olacaktır.

$$u = B_0 + B_1 \exp(-\varphi(\xi)) + B_2 \exp(-\varphi(\xi))^2 \quad (3.7)$$

Son olarak, oluşan bu denklemde, $\exp(-\varphi(\xi))^i$ fonksiyonları düzenlenir ve fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır. Bu durumda aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} 0 &= a_2 B_2 f^2 + a_1 B_2 f k + a B_2 m^2 + b B_1^2 m^2 + 2b B_0 B_2 m^2 + 8B_2 c \eta m^4 + 4B_2 c \lambda^2 m^4 \\ &\quad + 3B_1 c \lambda m^4 + B_2 d k^2 + B_2 f m + \alpha B_2 k m + \beta B_2 l m, \\ 0 &= a_2 B_1 f^2 + a_1 B_1 f k + a B_1 m^2 + 2b B_0 B_1 m^2 + 6B_2 c \eta \lambda m^4 + 2B_1 c \eta m^4 + B_1 c \lambda^2 m^4 \\ &\quad + B_1 d k^2 + B_1 f m + \alpha B_1 k m + \beta B_1 l m, \\ 0 &= a_2 B_0 f^2 + a_1 B_0 f k + a B_0 m^2 + b B_0^2 m^2 + 2B_2 c \eta^2 m^4 + B_1 c \eta \lambda m^4 + B_0 d k^2 \\ &\quad + B_0 f m + \alpha B_0 k m + \beta B_0 l m, \\ 0 &= 2b B_1 B_2 m^2 + 10B_2 c \lambda m^4 + 2B_1 c m^4, \\ 0 &= b B_2^2 m^2 + 6B_2 c m^4. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Bu cebirsel denklem sistem çözüldüğünde B_0, B_1, B_2 ve f değerleri için dört çözüm kümesi elde edilir.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} B_0 &= -\frac{6c\eta m^2}{b}, \quad B_1 = -\frac{6c\lambda m^2}{b}, \quad B_2 = -\frac{6cm^2}{b}, \\ f &= \frac{-m - a_1 k - \sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2 (am^2 - 4c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)}}{2a_2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Küme 1:

$\lambda^2 - 4\eta > 0, \eta \neq 0$ için,

$$\begin{aligned} u_{1,1}(x, y, z, t) &= -\frac{6c\eta m^2}{b} - \frac{12c\eta \lambda m^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (A + W) \right) - \lambda \right)} \\ &\quad - \frac{24c\eta^2 m^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (A + W) \right) - \lambda \right)^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Burada, $A = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - 4c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$ ve

$W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{1,2}(x, y, z, t) = -\frac{6c\eta m^2}{b} - \frac{12c\eta \lambda m^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (A + W) \right) - \lambda \right)} - \frac{24c\eta^2 m^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (A + W) \right) - \lambda \right)^2} \quad (3.11)$$

Burada, $A = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - 4c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$ ve

$W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{1,3}(x, y, z, t) = -\frac{6c\lambda^2 m^2}{b (\sinh(\lambda(A_1 + W)) + \cosh(\lambda(A_1 + W)) - 1)} - \frac{6c\lambda^2 m^2}{b (\sinh(\lambda(A_1 + W)) + \cosh(\lambda(A_1 + W)) - 1)^2} \quad (3.12)$$

Burada, $A_1 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$ ve

$W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{1,4}(x, y, z, t) = -\frac{6c\eta m^2}{b} - \frac{3c\lambda^4 m^2 (A_2 + W)^2}{2b (\lambda(A_2 + W) + 2)^2} + \frac{3c\lambda^3 m^2 (A_2 + W)}{b (\lambda(A_2 + W) + 2)} \quad (3.13)$$

Burada, $A_2 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$ ve

$W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{1,5}(x, y, z, t) = -\frac{6cm^2}{b(A_3 + h + ky + lz + mx)^2} \quad (3.14)$$

Burada, $A_3 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + 4c\eta m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$ şeklindedir.

Çözüm 2:

$$B_0 = -\frac{6c\eta m^2}{b}, B_1 = -\frac{6c\lambda m^2}{b}, B_2 = -\frac{6cm^2}{b},$$

$$f = \frac{-m - a_1k + \sqrt{(a_1k + m)^2 - 4a_2(am^2 - 4c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)}}{2a_2} \quad (3.15)$$

Küme 2:

$\lambda^2 - 4\eta > 0, \eta \neq 0$ için,

$$u_{2,1}(x, y, z, t) = -\frac{6c\eta m^2}{b} - \frac{12c\eta\lambda m^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (A + W) \right) - \lambda \right)}$$

$$-\frac{24c\eta^2 m^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (A + W) \right) - \lambda \right)^2} \quad (3.16)$$

Burada, $A = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1k+m)^2 - 4a_2(am^2 - 4c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1k - m \right)}{2a_2\vartheta}$ ve

$W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{2,2}(x, y, z, t) = -\frac{6c\eta m^2}{b} - \frac{12c\eta\lambda m^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (A + W) \right) - \lambda \right)}$$

$$-\frac{24c\eta^2 m^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (A + W) \right) - \lambda \right)^2} \quad (3.17)$$

Burada, $A = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1k+m)^2 - 4a_2(am^2 - 4c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1k - m \right)}{2a_2\vartheta}$ ve

$W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0, \lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{2,3}(x, y, z, t) = -\frac{6c\lambda^2 m^2}{b \left(\sinh(\lambda(A_1 + W)) + \cosh(\lambda(A_1 + W)) - 1 \right)}$$

$$-\frac{6c\lambda^2 m^2}{b \left(\sinh(\lambda(A_1 + W)) + \cosh(\lambda(A_1 + W)) - 1 \right)^2} \quad (3.18)$$

Burada, $A_1 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1k+m)^2 - 4a_2(am^2 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1k - m \right)}{2a_2\vartheta}$ ve

$W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{2,4}(x, y, z, t) = -\frac{6c\eta m^2}{b} + \frac{3c\lambda^3 m^2 (A_2 + W)}{b(\lambda(A_2 + W) + 2)} - \frac{3c\lambda^4 m^2 (A_2 + W)^2}{2b(\lambda(A_2 + W) + 2)^2} \quad (3.19)$$

Burada, $A_2 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$ ve $W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{2,5}(x, y, z, t) = -\frac{6cm^2}{b \left(\frac{t^\vartheta \left(\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + 4c\eta m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta} + W \right)^2} \quad (3.20)$$

Burada, $W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

Çözüm 3:

$$B_0 = \frac{-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2}{b}, B_1 = -\frac{6c\lambda m^2}{b}, B_2 = -\frac{6cm^2}{b},$$

$$f = \frac{-m - a_1 k - \sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - 4c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)}}{2a_2} \quad (3.21)$$

Küme 3:

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\eta \neq 0$ için,

$$u_{3,1}(x, y, z, t) = \frac{-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2}{b}$$

$$\frac{12c\eta \lambda m^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (A_4 + W) \right) - \lambda \right)}$$

$$\frac{24c\eta^2 m^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (A_4 + W) \right) - \lambda \right)^2} \quad (3.22)$$

Burada,

$$A_4 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + 8c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + 2m^2(-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2) + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$$

ve $W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{3,2}(x, y, z, t) = \frac{-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2}{b} - \frac{12c\eta\lambda m^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (A_4 + W) \right) - \lambda \right)} - \frac{24c\eta^2 m^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (A_4 + W) \right) - \lambda \right)^2} \quad (3.23)$$

Burada,

$$A_4 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + 8c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + 2m^2(-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2) + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$$

ve $W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{3,3}(x, y, z, t) = -\frac{c\lambda^2 m^2}{b} - \frac{6c\lambda^2 m^2}{b (\sinh(\lambda(A_5 + W)) + \cosh(\lambda(A_5 + W)) - 1)} - \frac{6c\lambda^2 m^2}{b (\sinh(\lambda(A_5 + W)) + \cosh(\lambda(A_5 + W)) - 1)^2}, \quad (3.24)$$

$$\text{Burada, } A_5 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta} \text{ ve}$$

$W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{3,4}(x, y, z, t) = -\frac{6c\eta m^2}{b} + \frac{3c\lambda^3 m^2 (A_2 + W)}{b(\lambda(A_2 + W) + 2)} - \frac{3c\lambda^4 m^2 (A_2 + W)^2}{2b(\lambda(A_2 + W) + 2)^2} \quad (3.25)$$

$$\text{Burada, } A_2 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta} \text{ ve } W = h + ky + lz + mx$$

şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{3,5}(x, y, z, t) = -\frac{4c\eta m^2}{b} - \frac{6cm^2}{b(A_6 + W)^2} \quad (3.26)$$

$$\text{Burada, } A_6 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - 4c\eta m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta} \text{ ve}$$

$W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

Çözüm 4:

$$\begin{aligned}
B_0 &= \frac{-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2}{b}, B_1 = -\frac{6c\lambda m^2}{b}, B_2 = -\frac{6cm^2}{b}, \\
f &= \frac{-m - a_1 k + \sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - 4c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)}}{2a_2}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Küme 4:

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\eta \neq 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{4,1}(x, y, z, t) &= \frac{-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2}{b} \\
&\quad - \frac{12c\eta\lambda m^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (A_4 + W) \right) - \lambda \right)} \\
&\quad - \frac{24c\eta^2 m^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (A_4 + W) \right) - \lambda \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Burada,

$$A_4 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + 8c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + 2m^2(-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2) + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$$

ve $W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{4,2}(x, y, z, t) &= \frac{-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2}{b} \\
&\quad - \frac{12c\eta\lambda m^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (A_4 + W) \right) - \lambda \right)} \\
&\quad - \frac{24c\eta^2 m^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (A_4 + W) \right) - \lambda \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Burada,

$$A_4 = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + 8c\eta m^4 + c\lambda^2 m^4 + 2m^2(-2c\eta m^2 - c\lambda^2 m^2) + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$$

ve $W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{4,3}(x, y, z, t) = -\frac{c\lambda^2 m^2}{b} - \frac{6c\lambda^2 m^2}{b(\sinh(\lambda(A_5 + W)) + \cosh(\lambda(A_5 + W)) - 1)} - \frac{6c\lambda^2 m^2}{b(\sinh(\lambda(A_5 + W)) + \cosh(\lambda(A_5 + W)) - 1)^2} \quad (3.30)$$

Burada, $A_5 = \frac{t^\vartheta(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - c\lambda^2 m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m)}{2a_2 \vartheta}$ ve $W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

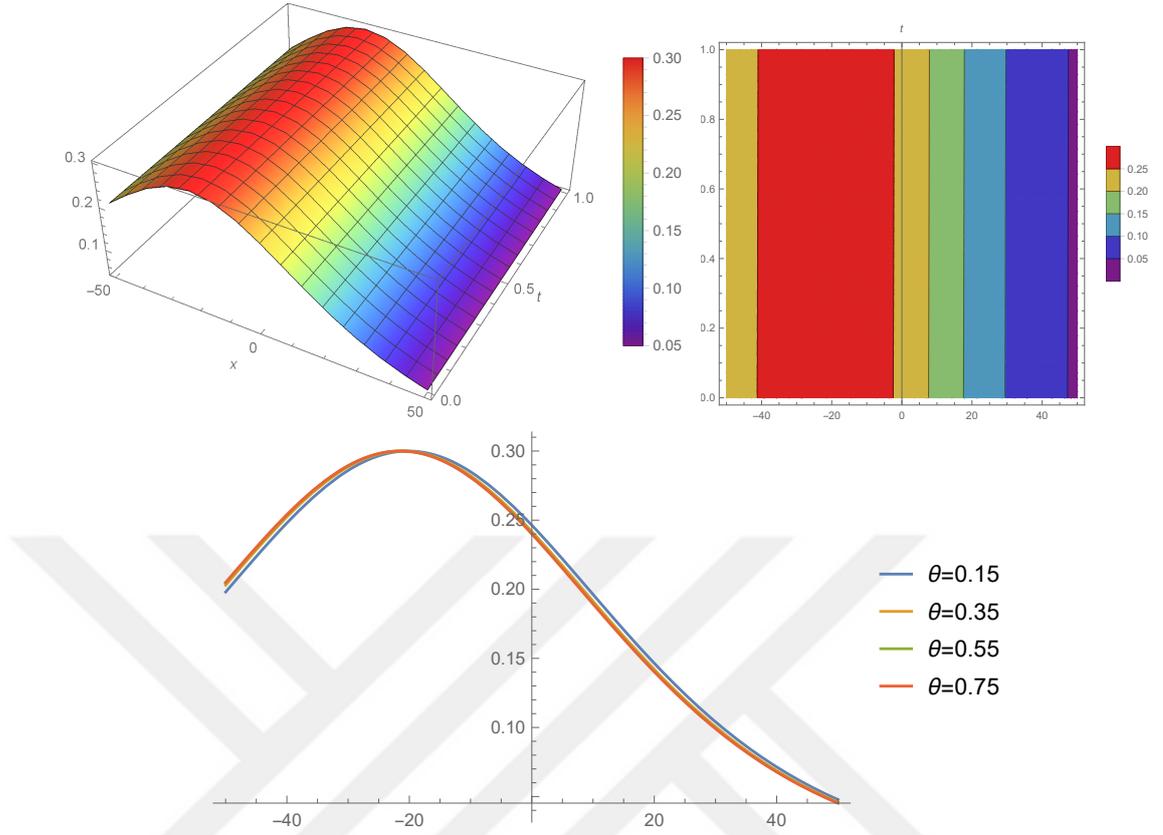
$$u_{4,4}(x, y, z, t) = -\frac{6c\eta m^2}{b} + \frac{3c\lambda^3 m^2 (A_2 + W)}{b(\lambda(A_2 + W) + 2)} - \frac{3c\lambda^4 m^2 (A_2 + W)^2}{2b(\lambda(A_2 + W) + 2)^2} \quad (3.31)$$

Burada, $A_2 = \frac{t^\vartheta(-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m)}{2a_2 \vartheta}$ ve $W = h + ky + lz + mx$ şeklindedir.

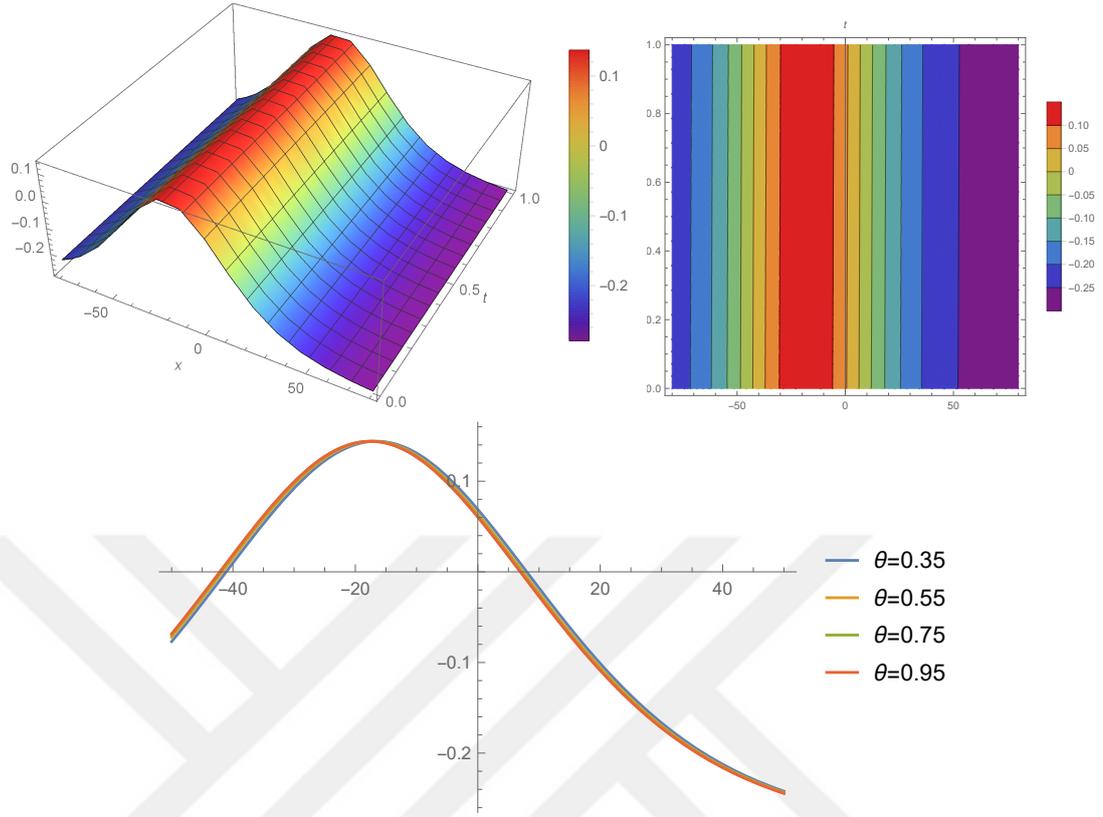
$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{4,5}(x, y, z, t) = -\frac{4c\eta m^2}{b} - \frac{6cm^2}{b(A_6 + h + ky + lz + mx)^2} \quad (3.32)$$

Burada, $A_6 = \frac{t^\vartheta(\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - 4c\eta m^4 + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m)}{2a_2 \vartheta}$ şeklindedir.



Şekil 3.1. (3.16) denkleminde elde edilen $u_{2,1}(x, y, z, t)$ nin $m = 0.2$, $k = -0.5$, $l = 0.03$, $d = 0.1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 4$, $c = 1$, $b = 0.01$, $y = 0.1$, $z = 0.5$, $h = 0.1$, $\eta = 0.05$, $\lambda = 0.5$, $a = 0.05$, $\alpha = 0.021$, $\beta = 0.024$, $\theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği.



Şekil 3.2. (3.22) denkleminde elde edilen $u_{3,1}(x, y, z, t)$ nin $m = 0.24, k = 0.5, l = 0.03, d = 0.1, a_1 = -1, a_2 = 4, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, z = 0.5, h = 0.1, \eta = 0.05, \lambda = 0.5, a = 0.05, \alpha = 0.021, \beta = 0.024, \theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği.

3.1.2. Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi ile Analitik Çözümler

Buradan, $N = 2$ değeri (2.27) denkleminde yerine yazıldığında kesik seri şu şekilde olacaktır:

$$u = b_0 + \frac{b_1}{1 + Q(\xi)} + \frac{b_2}{(1 + Q(\xi))^2} \quad (3.33)$$

Son olarak, oluşan bu denklemde, $(1 + Q(\xi))^i$ fonksiyonları düzenlenir ve fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır. Bu durumda aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
0 &= 8a_2b_0f^2 + 6a_2b_1f^2 + 4a_2b_2f^2 + 8a_1b_0fk + 6a_1b_1fk + 4a_1b_2fk + 8ab_0m^2 \\
&\quad + 6ab_1m^2 + 4ab_2m^2 - 2b_1c\delta^2m^4 - 4b_2c\delta^2m^4 + 4b_1c\delta m^4\sigma + 20b_2c\delta m^4\sigma \\
&\quad + 4b_1cm^4\sigma^2 - 4b_1cm^4\sigma\tau - 8b_2cm^4\sigma\tau + 8b_0dk^2 + 6b_1dk^2 + 4b_2dk^2 + 8b_0fm \\
&\quad + 6b_1fm + 4b_2fm + 8\alpha b_0km + 6\alpha b_1km + 4\alpha b_2km + 8\beta b_0lm + 6\beta b_1lm \\
&\quad + 4\beta b_2lm + 8bb_0^2m^2 + 4bb_1^2m^2 + 12bb_0b_1m^2 + 8bb_0b_2m^2 + 4bb_1b_2m^2, \\
0 &= 12a_2b_0f^2 + 6a_2b_1f^2 + 2a_2b_2f^2 + 12a_1b_0fk + 6a_1b_1fk + 2a_1b_2fk + 12ab_0m^2 \\
&\quad + 6ab_1m^2 + 2ab_2m^2 + 8b_2c\delta^2m^4 + 6b_1c\delta m^4\sigma - 6b_1c\delta m^4\tau - 12b_2c\delta m^4\tau \\
&\quad + 16b_2cm^4\sigma\tau + 12b_0dk^2 + 6b_1dk^2 + 2b_2dk^2 + 12b_0fm + 6b_1fm + 2b_2fm \\
&\quad + 12\alpha b_0km + 6\alpha b_1km + 2\alpha b_2km + 12\beta b_0lm + 6\beta b_1lm + 2\beta b_2lm + 12bb_0^2m^2 \\
&\quad + 2bb_1^2m^2 + 12bb_0b_1m^2 + 4bb_0b_2m^2, \\
0 &= 2a_2b_0f^2 + 2a_2b_1f^2 + 2a_2b_2f^2 + 2a_1b_0fk + 2a_1b_1fk + 2a_1b_2fk + 2ab_0m^2 \\
&\quad + 2ab_1m^2 + 2ab_2m^2 - 2b_1c\delta m^4\sigma - 4b_2c\delta m^4\sigma + 4b_1cm^4\sigma^2 + 12b_2cm^4\sigma^2 \\
&\quad + 2b_0dk^2 + 2b_1dk^2 + 2b_2dk^2 + 2b_0fm + 2b_1fm + 2b_2fm + 2\alpha b_0km \\
&\quad + 2\alpha b_1km + 2\alpha b_2km + 2\beta b_0lm + 2\beta b_1lm + 2\beta b_2lm + 2bb_0^2m^2 \\
&\quad + 2bb_1^2m^2 + 2bb_2^2m^2 + 4bb_0b_1m^2 + 4bb_0b_2m^2 + 4bb_1b_2m^2, \\
0 &= 8a_2b_0f^2 + 2a_2b_1f^2 + 8a_1b_0fk + 2a_1b_1fk + 8ab_0m^2 + 2ab_1m^2 + 2b_1c\delta^2m^4 \\
&\quad - 4b_1c\delta m^4\tau + 12b_2c\delta m^4\tau + 4b_1cm^4\sigma\tau - 4b_1cm^4\tau^2 - 8b_2cm^4\tau^2 + 8b_0dk^2 \\
&\quad + 2b_1dk^2 + 8b_0fm + 2b_1fm + 8\alpha b_0km + 2\alpha b_1km + 8\beta b_0lm + 2\beta b_1lm \\
&\quad + 8bb_0^2m^2 + 4bb_0b_1m^2, \\
0 &= 2a_2b_0f^2 + 2a_1b_0fk + 2ab_0m^2 + 2b_1c\delta m^4\tau - 4b_1cm^4\tau^2 + 4b_2cm^4\tau^2 + 2b_0dk^2 \\
&\quad + 2b_0fm + 2\alpha b_0km + 2\beta b_0lm + 2bb_0^2m^2. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde b_0, b_1, b_2 ve f değerleri için dört çözüm kümesi elde edilir.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{6cm^2\tau(\delta-\sigma-\tau)}{b}, b_1 = \frac{6cm^2(\delta-2\tau)(\delta-\sigma-\tau)}{b}, b_2 = -\frac{6cm^2(\delta-\sigma-\tau)^2}{b}, \\
f &= \frac{-m-a_1k - \sqrt{(a_1k+m)^2 - 4a_2(am^2+c\delta^2m^4 - 4cm^4\sigma\tau + dk^2 + \alpha km + \beta lm)}}{2a_2} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Küme 1:

$\tau \neq 0$ için,

$$u_{5,1}(x, y, z, t) = -\frac{6cm^2\tau(\delta-\sigma-\tau)(\delta^2-4\sigma\tau)\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\sigma\tau-\delta^2}(A_7+W_1)\right)}{b\left(-\sqrt{4\sigma\tau-\delta^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\sigma\tau-\delta^2}(A_7+W_1)\right)+\delta-2\tau\right)^2} \tag{3.36}$$

Burada, $A_7 = -\frac{t^\vartheta \left(\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(m(am + cm^3(\delta^2 - 4\sigma\tau) + \alpha k + \beta l) + dk^2)} + a_1 k + m \right)}{2a_2 \vartheta}$ ve

$W_1 = d + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\delta \neq 0$ ve $\sigma = 0$ için,

$$u_{5,2}(x, y, z, t) = \frac{6c\delta^2 m^2 (\delta - \tau) e^{\delta \left(-\frac{t^\vartheta (\sqrt{A_8 + a_1 k + m}}{2a_2 \vartheta} + d + ky + lz + mx \right)}}{b \left((\delta - \tau) e^{\delta \left(-\frac{t^\vartheta (\sqrt{A_8 + a_1 k + m}}{2a_2 \vartheta} + d + ky + lz + mx \right)} + 1 \right)^2} \quad (3.37)$$

Burada, $A_8 = (a_1 k + m)^2 - 4a_2(m(am + c\delta^2 m^3 + \alpha k + \beta l) + dk^2)$ şeklindedir.

$\delta \neq 0$ ve $\tau = 0$ için,

$$u_{5,3}(x, y, z, t) = \frac{6c\delta^2 m^2 (\delta - \sigma) e^{\delta \left(-\frac{t^\vartheta (\sqrt{A_8 + a_1 k + m}}{2a_2 \vartheta} + d + ky + lz + mx \right)}}{b \left(e^{\delta \left(-\frac{t^\vartheta (\sqrt{A_8 + a_1 k + m}}{2a_2 \vartheta} + d + ky + lz + mx \right)} + \delta - \sigma \right)^2} \quad (3.38)$$

Burada, $A_8 = (a_1 k + m)^2 - 4a_2(m(am + c\delta^2 m^3 + \alpha k + \beta l) + dk^2)$ şeklindedir.

Çözüm 2:

$$b_0 = \frac{6cm^2 \tau (\delta - \sigma - \tau)}{b}, b_1 = \frac{6cm^2 (\delta - 2\tau) (\delta - \sigma - \tau)}{b}, b_2 = -\frac{6cm^2 (\delta - \sigma - \tau)^2}{b},$$

$$f = \frac{-m - a_1 k + \sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 + c\delta^2 m^4 - 4cm^4 \sigma \tau + dk^2 + \alpha km + \beta lm)}}{2a_2} \quad (3.39)$$

Küme 2:

$\tau \neq 0$ için,

$$u_{6,1}(x, y, z, t) = -\frac{6cm^2 \tau (\delta - \sigma - \tau) (\delta^2 - 4\sigma\tau) \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\sigma\tau - \delta^2} (A_9 + W_1) \right)}{b \left(-\sqrt{4\sigma\tau - \delta^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\sigma\tau - \delta^2} (A_9 + W_1) \right) + \delta - 2\tau \right)^2} \quad (3.40)$$

Burada, $A_9 = -\frac{t^\vartheta \left(\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(m(am + cm^3(\delta^2 - 4\sigma\tau) + \alpha k + \beta l) + dk^2)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$ ve

$W_1 = d + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\delta \neq 0$ ve $\sigma = 0$ için,

$$u_{6,2}(x, y, z, t) = \frac{6c\delta^2 m^2 (\delta - \tau) e^{\delta(A_{10} + d + ky + lz + mx)}}{b \left((\delta - \tau) e^{\delta(A_{10} + d + ky + lz + mx)} + 1 \right)^2} \quad (3.41)$$

Burada, $A_{10} = \frac{t^\vartheta \left(\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(m(am + c\delta^2 m^3 + \alpha k + \beta l) + dk^2)} - a_1 k - m \right)}{2a_2 \vartheta}$ şeklindedir.

$\delta \neq 0$ ve $\tau = 0$ için,

$$u_{6,3}(x, y, z, t) = \frac{6c\delta^2 m^2 (\delta - \sigma) e^{\delta(A_{10} + d + ky + lz + mx)}}{b (e^{\delta(A_{10} + d + ky + lz + mx)} + \delta - \sigma)^2} \quad (3.42)$$

Burada, $A_{10} = \frac{t^\vartheta (\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(m(am + c\delta^2 m^3 + \alpha k + \beta l) + dk^2)} - a_1 k - m)}{2a_2 \vartheta}$ şeklindedir.

Çözüm 3:

$$b_0 = -\frac{cm^2(\delta^2 - 6\delta\tau + 2\sigma\tau + 6\tau^2)}{b}, b_1 = \frac{6cm^2(\delta - 2\tau)(\delta - \sigma - \tau)}{b}, b_2 = -\frac{6cm^2(\delta - \sigma - \tau)^2}{b},$$

$$f = \frac{-m - a_1 k - \sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - c\delta^2 m^4 + 4cm^4\sigma\tau + dk^2 + \alpha km + \beta lm)}}{2a_2} \quad (3.43)$$

Küme 3:

$\tau \neq 0$ için,

$$u_{7,1}(x, y, z, t) = -\frac{cm^2(\delta^2 - 6\delta\tau + 2\sigma\tau + 6\tau^2)}{b}$$

$$-\frac{6cm^2(\delta - 2\tau)(\delta - \sigma - \tau)}{b \left(\frac{\sqrt{4\sigma\tau - \delta^2} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\sigma\tau - \delta^2}(A_{11} + W_1)\right) - \delta}{2\tau} + 1 \right)}$$

$$+ \frac{6cm^2(\delta - \sigma - \tau)^2}{b \left(\frac{\sqrt{4\sigma\tau - \delta^2} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\sigma\tau - \delta^2}(A_{11} + W_1)\right) - \delta}{2\tau} + 1 \right)^2} \quad (3.44)$$

Burada, $A_{11} = \frac{t^\vartheta (-\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(am^2 - c\delta^2 m^4 + 4cm^4\sigma\tau + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1 k - m)}{2a_2 \vartheta}$ ve

$W_1 = d + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\delta \neq 0$ ve $\sigma = 0$ için,

$$u_{7,2}(x, y, z, t) = \frac{c\delta^2 m^2}{b} \left(\frac{6(\delta - \tau) e^{\frac{\delta(t^\vartheta(\sqrt{A_{12}} + m) - 2a_2\vartheta(d + ky + lz + mx) + a_1 kt^\vartheta)}{2a_2 \vartheta}}}{\left(e^{\frac{\delta(t^\vartheta(\sqrt{A_{12}} + m) - 2a_2\vartheta(d + ky + lz + mx) + a_1 kt^\vartheta)}{2a_2 \vartheta}} + \delta - \tau \right)^2} - 1 \right) \quad (3.45)$$

Burada, $A_{12} = (a_1 k + m)^2 - 4a_2(m(am - c\delta^2 m^3 + \alpha k + \beta l) + dk^2)$ şeklindedir.

$\delta \neq 0$ ve $\tau = 0$ için,

$$u_{7,3}(x, y, z, t) = \frac{c\delta^2 m^2}{b} \left(-\frac{6(\delta - \sigma)^2}{(e^{\delta(A_{13} + W_1)} + \delta - \sigma)^2} + \frac{6(\delta - \sigma)}{e^{\delta(A_{13} + W_1)} + \delta - \sigma} - 1 \right) \quad (3.46)$$

Burada, $A_{13} = -\frac{t^\vartheta (\sqrt{(a_1 k + m)^2 - 4a_2(m(am - c\delta^2 m^3 + \alpha k + \beta l) + dk^2)} + a_1 k + m)}{2a_2 \vartheta}$ ve

$W_1 = d + ky + lz + mx$ şeklindedir.

Çözüm 4:

$$b_0 = -\frac{cm^2(\delta^2 - 6\delta\tau + 2\sigma\tau + 6\tau^2)}{b}, b_1 = \frac{6cm^2(\delta - 2\tau)(\delta - \sigma - \tau)}{b}, b_2 = -\frac{6cm^2(\delta - \sigma - \tau)^2}{b},$$

$$f = \frac{-m - a_1k + \sqrt{(a_1k + m)^2 - 4a_2(am^2 - c\delta^2m^4 + 4cm^4\sigma\tau + dk^2 + \alpha km + \beta lm)}}{2a_2} \quad (3.47)$$

Küme 4:

$\tau \neq 0$ için,

$$u_{8,1}(x, y, z, t) = -\frac{cm^2(\delta^2 - 6\delta\tau + 2\sigma\tau + 6\tau^2)}{b}$$

$$-\frac{6cm^2(\delta - 2\tau)(\delta - \sigma - \tau)}{b \left(\frac{\sqrt{4\sigma\tau - \delta^2} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\sigma\tau - \delta^2}(A_{11} + W_1)\right) - \delta}{2\tau} + 1 \right)}$$

$$+ \frac{6cm^2(\delta - \sigma - \tau)^2}{b \left(\frac{\sqrt{4\sigma\tau - \delta^2} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\sigma\tau - \delta^2}(A_{11} + W_1)\right) - \delta}{2\tau} + 1 \right)^2} \quad (3.48)$$

Burada, $A_{11} = \frac{t^\vartheta \left(-\sqrt{(a_1k + m)^2 - 4a_2(am^2 - c\delta^2m^4 + 4cm^4\sigma\tau + dk^2 + \alpha km + \beta lm)} - a_1k - m \right)}{2a_2\vartheta}$ ve $W_1 = d + ky + lz + mx$ şeklindedir.

$\delta \neq 0$ ve $\sigma = 0$ için,

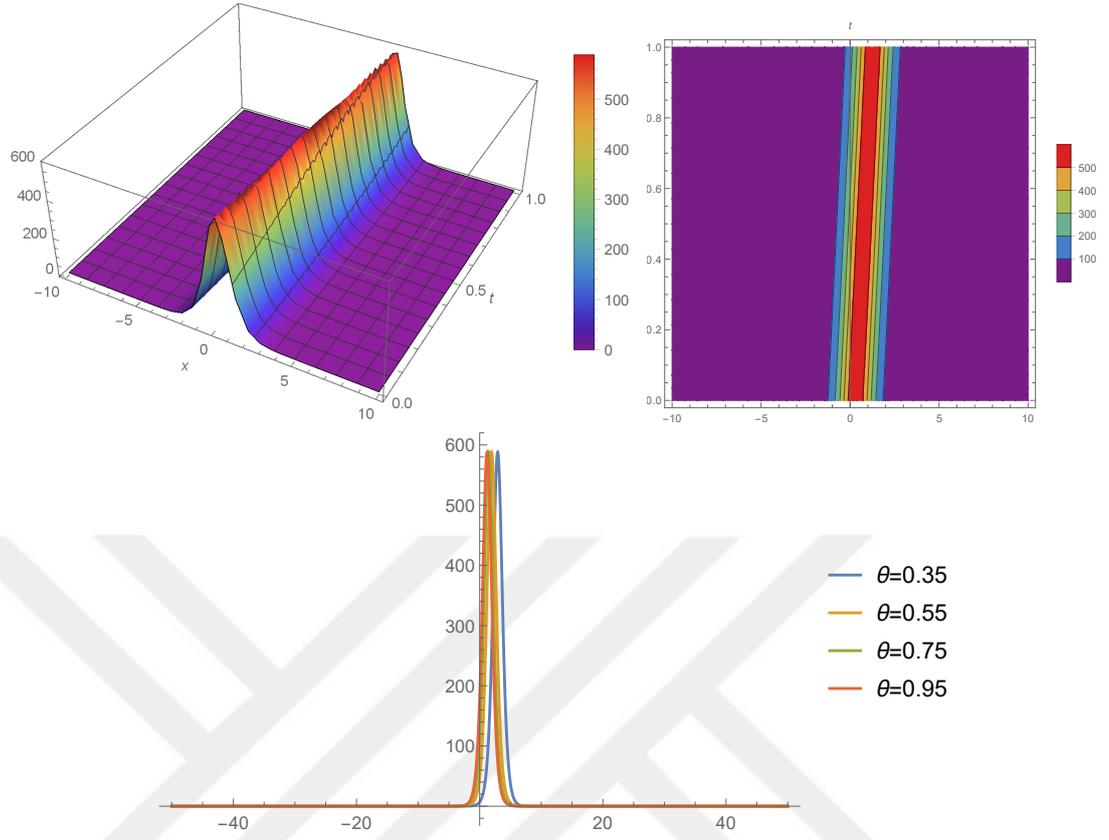
$$u_{8,2}(x, y, z, t) = -\frac{c\delta^2m^2 \left((\delta - \tau)^2 e^{\frac{\delta(A_{14} + 2a_2\vartheta W_1)}{2a_2\vartheta}} - 4(\delta - \tau) e^{\frac{\delta(A_{14} + 2a_2\vartheta W_1)}{2a_2\vartheta}} + 1 \right)}{b \left((\delta - \tau) e^{\frac{\delta(A_{14} + 2a_2\vartheta W_1)}{2a_2\vartheta}} + 1 \right)^2} \quad (3.49)$$

Burada, $A_{14} = t^\vartheta \sqrt{(a_1k + m)^2 - 4a_2(m(am - c\delta^2m^3 + \alpha k + \beta l) + dk^2)} - t^\vartheta(a_1k + m)$ ve $W_1 = d + ky + lz + mx$ şeklindedir.

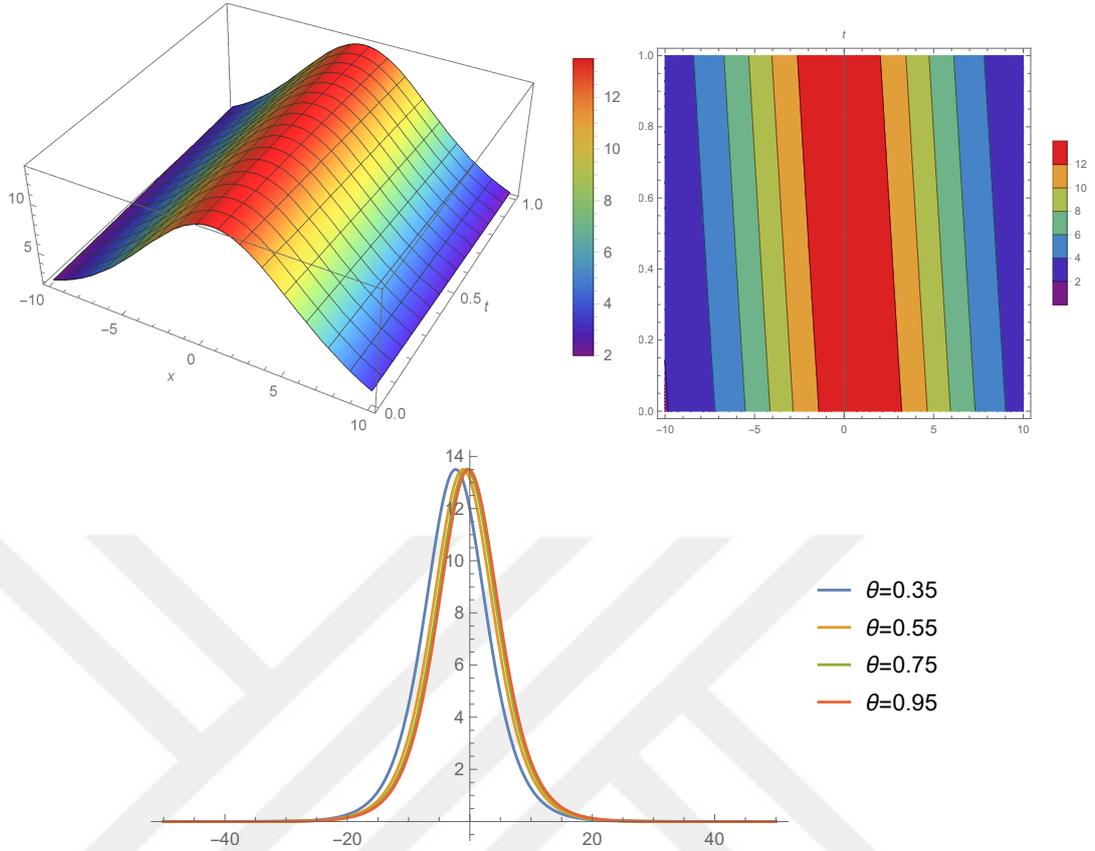
$\delta \neq 0$ ve $\tau = 0$ için,

$$u_{8,3}(x, y, z, t) = \frac{c\delta^2m^2}{b} \left(\frac{6(\delta - \sigma) e^{\frac{\delta(t^\vartheta \sqrt{A_{12}} + 2a_2\vartheta(d + ky + lz + mx) - t^\vartheta(a_1k + m))}{2a_2\vartheta}}}{\left(e^{\frac{\delta(t^\vartheta \sqrt{A_{12}} + 2a_2\vartheta(d + ky + lz + mx) - t^\vartheta(a_1k + m))}{2a_2\vartheta}} + \delta - \sigma \right)^2} - 1 \right) \quad (3.50)$$

Burada, $A_{12} = (a_1k + m)^2 - 4a_2(m(am - c\delta^2m^3 + \alpha k + \beta l) + dk^2)$ şeklindedir.



Şekil 3.3. (3.37) denkleminde elde edilen $u_{5,2}(x, y, z, t)$ nin $m = -0.99, k = -0.5, l = 0.03, d = 0.1, a_1 = -1, a_2 = -4, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, z = 0.5, h = 0.1, a = 0.05, \alpha = \beta = 0.02, \delta = 2, \tau = 0.4, \theta = 0.98$ ve $t = 0.9$ değerleri için analitik çözüm grafiği.



Şekil 3.4. (3.41) denkleminde elde edilen $u_{6,2}(x, y, z, t)$ nin $m = -0.15, k = 0.2, l = 0.03, d = 0.1, a_1 = -1, a_2 = -2, c = 1, b = 0.01, y = 0.1, z = 0.5, h = 0.1, a = 0.05, \alpha = \beta = 0.02, \delta = 2, \sigma = 0.5, \tau = 1, \theta = 0.98$ ve $t = 0.9$ değerleri için analitik çözüm grafiği.

3.2. (2+1)-Boyutlu Doğrusal Olmayan Boussinesq Denklemleri

Boussinesq denklemi, akışkan mekaniği ve hidrodinamikte önemli bir denklemdir. Jean-Baptiste Boussinesq tarafından geliştirilmiştir. Bu denklem, akışkanın bir boyutlu hareketini ve sıcaklık değişimlerini tanımlamak için kullanılır [40]. Bu denklemler, suyun yüzeyindeki dalga oluşumunu ve davranışını hesaba katarak dalgaların şekil değiştirmesi ve yayılması gibi olayları açıklar. Boussinesq yaklaşımı, su dalgalarının karmaşık davranışını anlamak ve mühendislik uygulamalarında kullanılmak üzere tasarlanmıştır.

$$Au_{xt} + au_{xx} + b(u)_{xx}^2 + cu_{xxxx} + du_{yy} + a_1u_{yt} + a_2u_{tt} = 0 \quad (3.51)$$

$u = u(x, y, t)$ dir. A, a, b, c, d, a_1 ve a_2 reel sabitlerdir.

Uygulamaya geçmeden önce, denklemin uyumlu kesirli türev versiyonu şu şekilde ifade edilir.

$$AD_t^\theta u_x + au_{xx} + b(u)_{xx}^2 + cu_{xxxx} + du_{yy} + a_1D_t^\theta u_y + a_2D_t^{2\theta} u = 0 \quad (3.52)$$

Burada $u(x, y, t) = u(\xi)$ ve $\xi = \beta x + \chi y + \delta \frac{t^\theta}{\theta}$ dönüşümleri yapılarak denklemin iki kez

integral alınarak,

$$a\beta^2u + a_2\delta^2u + a_1\delta\chi u + A\beta\delta u + b\beta^2u^2 + \beta^4cu'' + d\chi^2u(\xi) = 0 \quad (3.53)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu indirgeme sonucunda oluşan u'' ve u^2 terimleri arasında dengeleme yapılır. Dengeleme bağıntısı $N + 2 = 2N$ olarak yazılır ve bu bağıntı çözüldüğünde dengeleme sayısı $N = 2$ olarak bulunur.

Şimdi bu sayı Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı yöntemi kesik serilere uygulanacaktır.

3.2.1. Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -Açılım Yöntemi ile Analitik Çözüm

Buradan, $N = 2$ değeri (2.7) denklemde yerine yazıldığında kesik seri şu şekilde olacaktır.

$$u = B_0 + B_1 \exp(-\varphi(\xi)) + B_2 \exp(-\varphi(\xi))^2 \quad (3.54)$$

Daha sonra, oluşan bu denklemde, $\exp(-\varphi(\xi))^i$ fonksiyonları düzenlenir ve fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır. Bu durumda aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} 0 &= a\beta^2B_2 + a_2B_2\delta^2 + a_1B_2\delta\chi + A\beta B_2\delta + b\beta^2B_1^2 + 2b\beta^2B_0B_2 + 8\beta^4B_2c\eta \\ &\quad + 4\beta^4B_2c\lambda^2 + 3\beta^4B_1c\lambda + B_2d\chi^2, \\ 0 &= a\beta^2B_1 + a_2B_1\delta^2 + a_1B_1\delta\chi + A\beta B_1\delta + 2b\beta^2B_0B_1 + 6\beta^4B_2c\eta\lambda + 2\beta^4B_1c\eta \\ &\quad + \beta^4B_1c\lambda^2 + B_1d\chi^2, \\ 0 &= a\beta^2B_0 + a_2B_0\delta^2 + a_1B_0\delta\chi + A\beta B_0\delta + b\beta^2B_0^2 + 2\beta^4B_2c\eta^2 + \beta^4B_1c\eta\lambda + B_0d\chi^2, \\ 0 &= 2b\beta^2B_1B_2 + 10\beta^4B_2c\lambda + 2\beta^4B_1c, \\ 0 &= b\beta^2B_2^2 + 6\beta^4B_2c. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde B_0 , B_1 , B_2 ve δ değerleri için dört çözüm kümesi elde edilir.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{-\beta^2c\lambda^2 - 2\beta^2c\eta}{b}, \quad B_1 = -\frac{6\beta^2c\lambda}{b}, \quad B_2 = -\frac{6\beta^2c}{b}, \\ \delta &= \frac{-\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + 4\beta^4c\eta + \beta^4(-c)\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta}{2a_2} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Küme 1:

$\lambda^2 - 4\eta > 0, \eta \neq 0$ için,

$$u_{9,1}(x, y, t) = \frac{-\beta^2 c \lambda^2 - 2\beta^2 c \eta}{b} - \frac{24\beta^2 c \eta^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (T + W_2) \right) - \lambda \right)^2} - \frac{12\beta^2 c \eta \lambda}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (T + W_2) \right) - \lambda \right)} \quad (3.57)$$

Burada, $T = \frac{t^\theta \left(-\sqrt{(a_1 \chi + A \beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + 4\beta^4 c \eta - c\beta^4 \lambda^2 + d\chi^2)} - a_1 \chi - A \beta \right)}{2a_2 \theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{9,2}(x, y, t) = \frac{-\beta^2 c \lambda^2 - 2\beta^2 c \eta}{b} - \frac{24\beta^2 c \eta^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (T + W_2) \right) - \lambda \right)^2} - \frac{12\beta^2 c \eta \lambda}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (T + W_2) \right) - \lambda \right)} \quad (3.58)$$

Burada, $T = \frac{t^\theta \left(-\sqrt{(a_1 \chi + A \beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + 4\beta^4 c \eta - c\beta^4 \lambda^2 + d\chi^2)} - a_1 \chi - A \beta \right)}{2a_2 \theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0, \lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{9,3}(x, y, t) = \frac{\beta^2 c \lambda^2}{b} - \frac{6\beta^2 c \lambda^2}{b (\sinh(\lambda (T_1 + W_2)) + \cosh(\lambda (T_1 + W_2)) - 1)} - \frac{6\beta^2 c \lambda^2}{b (\sinh(\lambda (T_1 + W_2)) + \cosh(\lambda (T_1 + W_2)) - 1)^2} \quad (3.59)$$

Burada, $T_1 = \frac{t^\theta \left(-\sqrt{(a_1 \chi + A \beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 - c\beta^4 \lambda^2 + d\chi^2)} - a_1 \chi - A \beta \right)}{2a_2 \theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{9,4}(x, y, t) = \frac{6\beta^2 c \eta}{b} - \frac{3\beta^2 c \lambda^3 \left(\frac{t^\theta (-\sqrt{T_2} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta} + W_2 \right)}{b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta (-\sqrt{T_2} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta} + W_2 \right) + 2 \right)} - \frac{3\beta^2 c \lambda^4 \left(\frac{t^\theta (-\sqrt{T_2} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta} + W_2 \right)^2}{2b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta (-\sqrt{T_2} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta} + W_2 \right) + 2 \right)^2} \quad (3.60)$$

Burada, $T_2 = (a_1 \chi + A\beta)^2 - 4a_2 (a\beta^2 + d\chi^2)$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{9,5}(x, y, t) = \frac{4\beta^2 c \eta}{b} - \frac{6\beta^2 c}{b \left(\frac{t^\theta (-\sqrt{(a_1 \chi + A\beta)^2 - 4a_2 (a\beta^2 + 4\beta^4 c \eta + d\chi^2)} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta} + W_2 \right)^2} \quad (3.61)$$

Burada, $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

Çözüm 2:

$$B_0 = \frac{-\beta^2 c \lambda^2 - 2\beta^2 c \eta}{b}, \quad B_1 = -\frac{6\beta^2 c \lambda}{b}, \quad B_2 = -\frac{6\beta^2 c}{b},$$

$$\delta = \frac{\sqrt{(a_1 \chi + A\beta)^2 - 4a_2 (a\beta^2 + 4\beta^4 c \eta + \beta^4 (-c)\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1 \chi - A\beta}{2a_2} \quad (3.62)$$

Küme 2:

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\eta \neq 0$ için,

$$u_{10,1}(x, y, t) = \frac{-\beta^2 c \lambda^2 - 2\beta^2 c \eta}{b} - \frac{24\beta^2 c \eta^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (T_3 + W_2) \right) - \lambda \right)^2} - \frac{12\beta^2 c \eta \lambda}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (T_3 + W_2) \right) - \lambda \right)} \quad (3.63)$$

Burada, $T_3 = \frac{t^\theta (\sqrt{(a_1 \chi + A\beta)^2 - 4a_2 (a\beta^2 + 4\beta^4 c \eta - c\beta^4 \lambda^2 + d\chi^2)} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{10,2}(x, y, t) = \frac{-\beta^2 c \lambda^2 - 2\beta^2 c \eta}{b} - \frac{24\beta^2 c \eta^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (T_3 + h + \beta x + \chi y) \right) - \lambda \right)^2} - \frac{12\beta^2 c \eta \lambda}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (T_3 + h + \beta x + \chi y) \right) - \lambda \right)} \quad (3.64)$$

Burada, $T_3 = \frac{t^\theta \left(\sqrt{(a_1 \chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + 4\beta^4 c \eta - c\beta^4 \lambda^2 + d\chi^2)} - a_1 \chi - A\beta \right)}{2a_2 \theta}$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{10,3}(x, y, t) = -\frac{\beta^2 c \lambda^2}{b} - \frac{6\beta^2 c \lambda^2}{b \left(\sinh(\lambda(T_4 + W_2)) + \cosh(\lambda(T_4 + W_2)) - 1 \right)} - \frac{6\beta^2 c \lambda^2}{b \left(\sinh(\lambda(T_4 + W_2)) + \cosh(\lambda(T_4 + W_2)) - 1 \right)^2} \quad (3.65)$$

Burada, $T_4 = \frac{t^\theta \left(\sqrt{(a_1 \chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 - c\beta^4 \lambda^2 + d\chi^2)} - a_1 \chi - A\beta \right)}{2a_2 \theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{10,4}(x, y, t) = -\frac{6\beta^2 c \eta}{b} - \frac{3\beta^2 c \lambda^3 \left(\frac{t^\theta (\sqrt{T_2} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta} + W_2 \right)}{b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta (\sqrt{T_2} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta} + W_2 \right) + 2 \right)} - \frac{3\beta^2 c \lambda^4 \left(\frac{t^\theta (\sqrt{T_2} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta} + W_2 \right)^2}{2b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta (\sqrt{T_2} - a_1 \chi - A\beta)}{2a_2 \theta} + W_2 \right) + 2 \right)^2} \quad (3.66)$$

Burada, $T_2 = (a_1 \chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + d\chi^2)$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{10,5}(x, y, t) = -\frac{4\beta^2 c \eta}{b} - \frac{6\beta^2 c}{b \left(\frac{t^\theta \left(\sqrt{(a_1 \chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 - 4\beta^4 c \eta + d\chi^2)} - a_1 \chi - A\beta \right)}{2a_2 \theta} + W_2 \right)^2} \quad (3.67)$$

Burada, $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

Çözüm 3:

$$\begin{aligned}
B_0 &= -\frac{6\beta^2 c\eta}{b}, \quad B_1 = -\frac{6\beta^2 c\lambda}{b}, \quad B_2 = -\frac{6\beta^2 c}{b}, \\
\delta &= \frac{-\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 - 4\beta^4 c\eta + \beta^4 c\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta}{2a_2}
\end{aligned} \quad (3.68)$$

Küme 3:

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\eta \neq 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{11,1}(x, y, t) &= -\frac{6\beta^2 c\eta}{b} - \frac{24\beta^2 c\eta^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (T_5 + W_2) \right) - \lambda \right)^2} \\
&\quad - \frac{12\beta^2 c\eta\lambda}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (T_5 + W_2) \right) - \lambda \right)}
\end{aligned} \quad (3.69)$$

Burada, $T_5 = \frac{t^\theta \left(-\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 - 4\beta^4 c\eta + \beta^4 c\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta \right)}{2a_2\theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{11,2}(x, y, t) &= -\frac{6\beta^2 c\eta}{b} - \frac{24\beta^2 c\eta^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (T_5 + W_2) \right) - \lambda \right)^2} \\
&\quad - \frac{12\beta^2 c\eta\lambda}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (T_5 + W_2) \right) - \lambda \right)}
\end{aligned} \quad (3.70)$$

Burada, $T_5 = \frac{t^\theta \left(-\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 - 4\beta^4 c\eta + \beta^4 c\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta \right)}{2a_2\theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{11,3}(x, y, t) &= -\frac{6\beta^2 c\lambda^2}{b \left(\sinh(\lambda(T_6 + W_2)) + \cosh(\lambda(T_6 + W_2)) - 1 \right)} \\
&\quad - \frac{6\beta^2 c\lambda^2}{b \left(\sinh(\lambda(T_6 + W_2)) + \cosh(\lambda(T_6 + W_2)) - 1 \right)^2}
\end{aligned} \quad (3.71)$$

Burada, $T_6 = \frac{t^\theta \left(-\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + \beta^4 c\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta \right)}{2a_2\theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{11,4}(x, y, t) = -\frac{6\beta^2 c\eta}{b} - \frac{3\beta^2 c\lambda^4 \left(\frac{t^\theta(-\sqrt{T_2} - a_1\chi - A\beta)}{2a_2\theta} + W \right)^2}{2b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta(-\sqrt{T_2} - a_1\chi - A\beta)}{2a_2\theta} + W_2 \right) + 2 \right)^2} + \frac{3\beta^2 c\lambda^3 \left(\frac{t^\theta(-\sqrt{T_2} - a_1\chi - A\beta)}{2a_2\theta} + W_2 \right)}{b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta(-\sqrt{T_2} - a_1\chi - A\beta)}{2a_2\theta} + W_2 \right) + 2 \right)} \quad (3.72)$$

Burada, $T_2 = (a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + d\chi^2)$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{11,5}(x, y, t) = -\frac{6\beta^2 c}{b \left(\frac{t^\theta(-\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + 4\beta^4 c\eta + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta)}{2a_2\theta} + W_2 \right)^2} \quad (3.73)$$

Burada, $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

Çözüm 4:

$$B_0 = -\frac{6\beta^2 c\eta}{b}, B_1 = -\frac{6\beta^2 c\lambda}{b}, B_2 = -\frac{6\beta^2 c}{b},$$

$$\delta = \frac{\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 - 4\beta^4 c\eta + \beta^4 c\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta}{2a_2} \quad (3.74)$$

Küme 4:

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\eta \neq 0$ için,

$$u_{12,1}(x, y, t) = -\frac{6\beta^2 c\eta}{b} - \frac{24\beta^2 c\eta^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (T_7 + W_2) \right) - \lambda \right)^2} - \frac{12\beta^2 c\eta\lambda}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (T_7 + W_2) \right) - \lambda \right)} \quad (3.75)$$

Burada, $T_7 = \frac{t^\theta(\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 - 4\beta^4 c\eta + \beta^4 c\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta)}{2a_2\theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{12,2}(x, y, t) = -\frac{6\beta^2 c\eta}{b} - \frac{24\beta^2 c\eta^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (T_7 + W_2) \right) - \lambda \right)^2} - \frac{12\beta^2 c\eta\lambda}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (T_7 + W_2) \right) - \lambda \right)} \quad (3.76)$$

Burada, $T_7 = \frac{t^\theta \left(\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 - 4\beta^4 c\eta + \beta^4 c\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta \right)}{2a_2\theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{12,3}(x, y, t) = -\frac{6\beta^2 c\lambda^2}{b \left(\sinh(\lambda(T_8 + W_2)) + \cosh(\lambda(T_8 + W_2)) - 1 \right)} - \frac{6\beta^2 c\lambda^2}{b \left(\sinh(\lambda(T_8 + W_2)) + \cosh(\lambda(T_8 + W_2)) - 1 \right)^2} \quad (3.77)$$

Burada, $T_8 = \frac{t^\theta \left(\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + \beta^4 c\lambda^2 + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta \right)}{2a_2\theta}$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

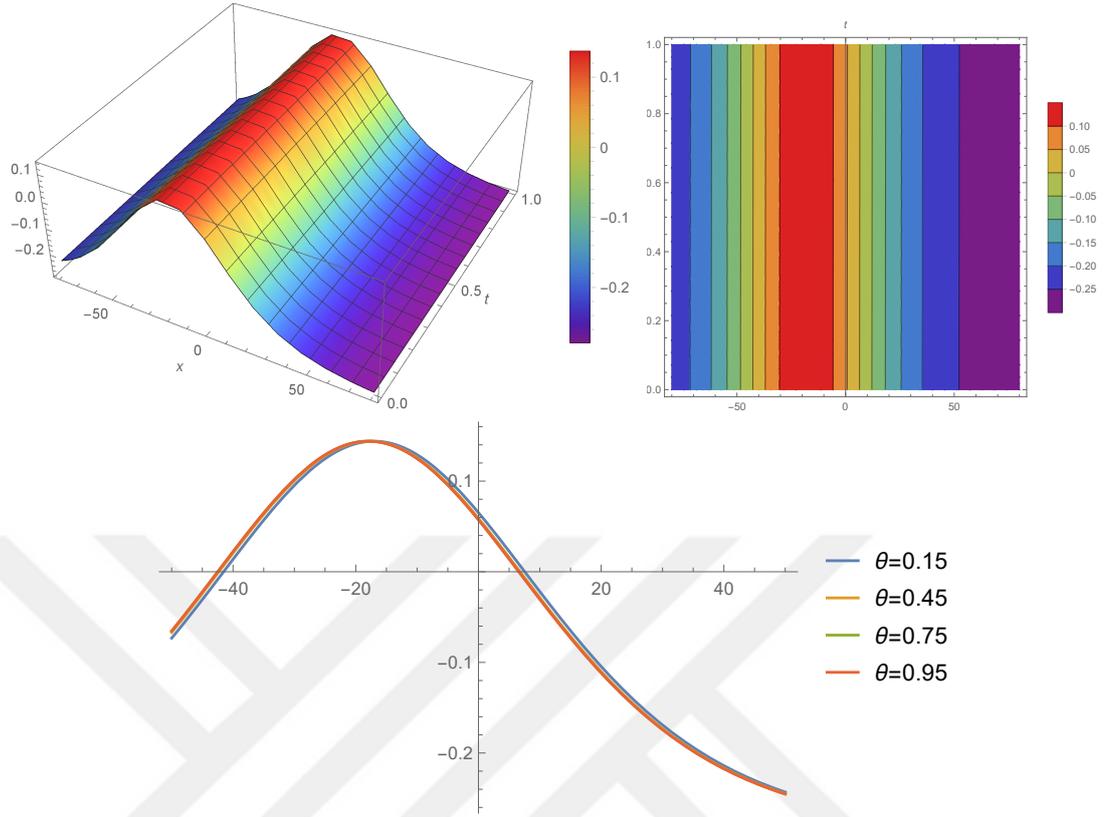
$$u_{12,4}(x, y, t) = -\frac{6\beta^2 c\eta}{b} - \frac{3\beta^2 c\lambda^4 \left(\frac{t^\theta (\sqrt{T_2 - a_1\chi - A\beta})}{2a_2\theta} + W_2 \right)^2}{2b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta (\sqrt{T_2 - a_1\chi - A\beta})}{2a_2\theta} + W_2 \right) + 2 \right)^2} + \frac{3\beta^2 c\lambda^3 \left(\frac{t^\theta (\sqrt{T_2 - a_1\chi - A\beta})}{2a_2\theta} + W_2 \right)}{b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta (\sqrt{T_2 - a_1\chi - A\beta})}{2a_2\theta} + W_2 \right) + 2 \right)} \quad (3.78)$$

Burada, $T_2 = (a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + d\chi^2)$ ve $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.

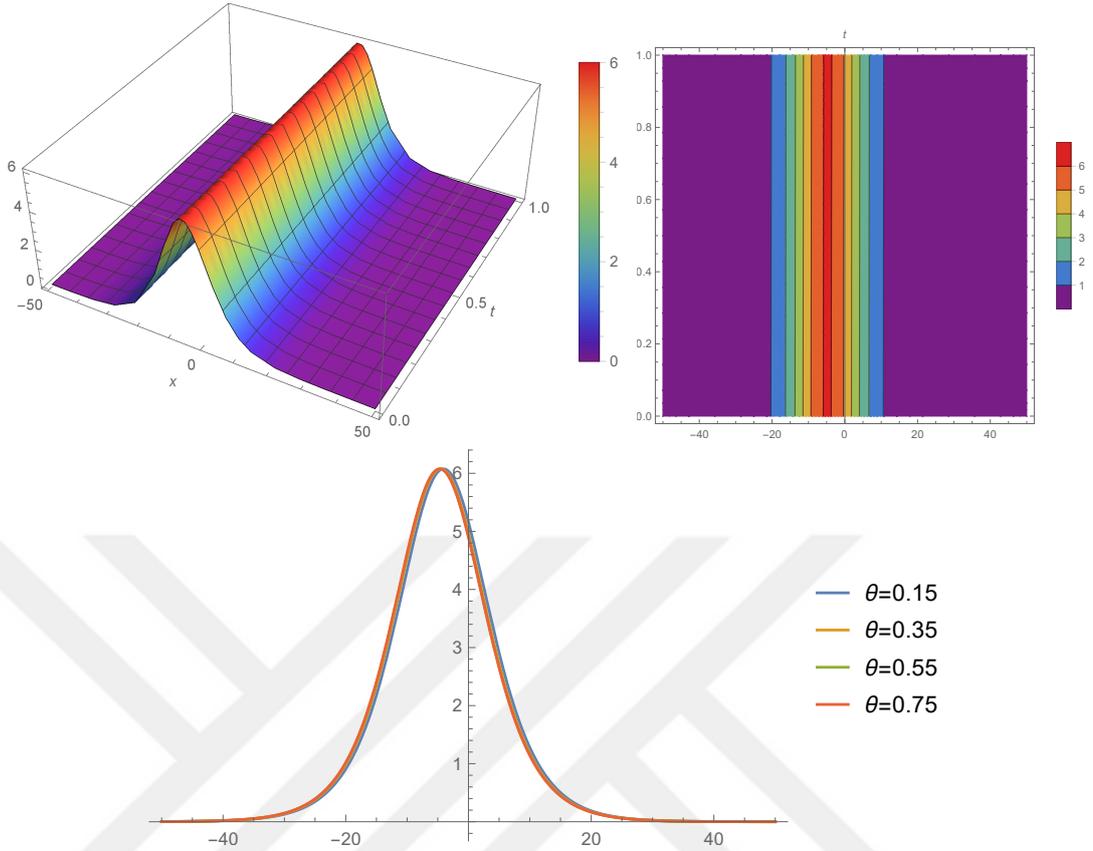
$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{12,5}(x, y, t) = -\frac{6\beta^2 c}{b \left(\frac{t^\theta \left(\sqrt{(a_1\chi + A\beta)^2 - 4a_2(a\beta^2 + 4\beta^4 c\eta + d\chi^2)} - a_1\chi - A\beta \right)}{2a_2\theta} + W_2 \right)^2} \quad (3.79)$$

Burada, $W_2 = h + \beta x + \chi y$ şeklindedir.



Şekil 3.5. (3.63) denkleminde elde edilen $u_{10,1}(x, y, z, t)$ nin $\beta = 0.24$, $\chi = -0.5$, $A = 0.03$, $d = 0.1$, $a_1 = -1$, $c = 1$, $b = 0.01$, $y = 0.1$, $h = 0.1$, $\eta = 0.05$, $\lambda = 0.5$, $a = 0.05$, $a_2 = -4$, $\theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği.



Şekil 3.6. (3.75) denkleminde elde edilen $u_{12,1}(x, y, z, t)$ nin $\beta = 0.9$, $\chi = -0.5$, $A = 0.03$, $d = 0.1$, $a_1 = -1$, $c = 1$, $b = 0.01$, $y = 0.1$, $h = 0.1$, $\eta = 0.05$, $\lambda = 0.5$, $a = 0.05$, $a_2 = -4$, $\theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği.

3.3. Genişletilmiş (2+1)-Boyutlu Doğrusal Olmayan Evrim Denklemi (DOED)

Doğrusal olmayan bilimin önemli bir alanı, integrallenebilir doğrusal olmayan evrim denklemlerinin (DOED) çözümüdür. Bu kapsamda, Korteweg-de Vries (KdV) ve doğrusal olmayan Schrödinger (DOS) denklemleri gibi ünlü bir boyuttaki DOED ile Kadomtsev-Petviashvili (KP) ve Davey-Stewartson (DS) denklemleri gibi iki uzamsal boyutta DOED'ler öne çıkmaktadır. Gerçek dünya olaylarının analizi büyük ölçüde DOED çözümleri üzerine dayanmaktadır; zira bu çözümler, doğrusal olmayan dalga yayılımı çalışmaları için temel niteliktedir. Çoklu-solitonlar, yumru dalgalar, haydut dalgalar ve bunların dinamik özellikleri gibi bileşenler, tüm DOED'ler için önemli rol oynamaktadır. Bu denklemlerin veya farklı versiyonlarının, okyanus, su, doğrusal olmayan optik, Bose-Einstein yoğuşmaları ve diğer alanlardaki potansiyel uygulamaları oldukça öneme sahiptir. DOED'lerin çözümü için etkili tekniklerin arayışı, geçen yıllarda büyük ilgi görmüştür [41].

$$Au_{xt} + au_{xx} + b(u)_{xx}^2 + cu_{xxxx} + du_{yy} = 0 \quad (3.80)$$

$u = u(x, y, t)$ dir. A, a, b, c ve d reel sabitlerdir.

Uygulamaya geçmeden önce, denklemin uyumlu kesirli türev versiyonu şu şekilde ifade edilir.

$$AD_t^\theta u_x + au_{xx} + b(u)_{xx}^2 + cu_{xxxx} + du_{yy} = 0, \quad 0 < \theta \leq 1 \quad (3.81)$$

Burada $u(x, y, t) = u(\xi)$ ve $\xi = kx + ly + m\frac{t^\theta}{\theta}$ dönüşümleri yapılarak denklemin iki kez integral alınarak,

$$ak^2u + Akmu + bk^2u^2 + ck^4u'' + dl^2u = 0 \quad (3.82)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu indirgeme sonucunda oluşan u'' ve u^2 terimleri arasında dengeleme yapılır. Dengeleme bağıntısı $N + 2 = 2N$ olarak yazılır ve bu bağıntı çözüldüğünde dengeleme sayısı $N = 2$ olarak bulunur.

Şimdi bu sayı Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -Açılımı, Değiştirilmiş Genişletilmiş tanh fonksiyonu ve RKSİY'nin kesik serilerine uygulanacaktır.

3.3.1. Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -Açılım Yöntemi ile Analitik Çözüm

Buradan, $N = 2$ değeri (2.7) denkleminde yerine yazıldığında kesik seri şu şekilde olacaktır.

$$u = B_0 + B_1 \exp(-\varphi(\xi)) + B_2 \exp(-\varphi(\xi))^2 \quad (3.83)$$

Son olarak, oluşan bu denklemde, $\exp(-\varphi(\xi))^i$ fonksiyonları düzenlenir ve fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır. Bu durumda aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} 0 &= 3ck^4\lambda B_1 + bk^2B_1^2 + ak^2B_2 + dl^2B_2 + AkmB_2 + 8ck^4\eta B_2 + 4ck^4\lambda^2 B_2 \\ &\quad + 2bk^2B_0B_2, \\ 0 &= ak^2B_0 + dl^2B_0 + AkmB_0 + bk^2B_0^2 + ck^4\eta\lambda B_1 + 2ck^4\eta^2 B_2, \\ 0 &= ak^2B_1 + dl^2B_1 + AkmB_1 + 2ck^4\eta B_1 + ck^4\lambda^2 B_1 + 2bk^2B_0B_1 + 6ck^4\eta\lambda B_2, \\ 0 &= 2ck^4B_1 + 10ck^4\lambda B_2 + 2bk^2B_1B_2, \\ 0 &= 6ck^4B_2 + bk^2B_2^2. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Bu cebirsel denklem sistem çözüldüğünde B_0, B_1, B_2 ve m değerleri için iki çözüm kümesi elde edilir.

Çözüm 1:

$$B_0 = -\frac{6c\eta k^2}{b}, B_1 = -\frac{6ck^2\lambda}{b}, B_2 = -\frac{6ck^2}{b}, m = -\frac{ak^2 + ck^4(\lambda^2 - 4\eta) + dl^2}{Ak} \quad (3.85)$$

Küme 1:

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\eta \neq 0$ için,

$$u_{13,1}(x, y, t) = -\frac{6c\eta k^2}{b} - \frac{12c \eta k^2 \lambda}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (S + h + kx + ly) \right) - \lambda \right)} - \frac{24c\eta^2 k^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\eta} (S + h + kx + ly) \right) - \lambda \right)^2} \quad (3.86)$$

Burada, $S = -\frac{t^\theta (ak^2 + ck^4 (\lambda^2 - 4\eta) + dl^2)}{A\theta k}$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{13,2}(x, y, t) = -\frac{6c\eta k^2}{b} - \frac{12c \eta \lambda k^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (S + h + kx + ly) \right) - \lambda \right)} - \frac{24c\eta^2 k^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta - \lambda^2} (S + h + kx + ly) \right) - \lambda \right)^2} \quad (3.87)$$

Burada, $S = -\frac{t^\theta (ak^2 + ck^4 (\lambda^2 - 4\eta) + dl^2)}{A\theta k}$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{13,3}(x, y, t) = -\frac{6ck^2 \lambda^2}{b (\sinh(\lambda(S_1)) + \cosh(\lambda(S_1)) - 1)} - \frac{6ck^2 \lambda^2}{b (\sinh(\lambda(S_1)) + \cosh(\lambda(S_1)) - 1)^2} \quad (3.88)$$

Burada, $S_1 = -\frac{t^\theta (ak^2 + c\lambda^2 k^4 + dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$u_{13,4}(x, y, t) = -\frac{6c\eta k^2}{b} + \frac{3ck^2 \lambda^3 \left(-\frac{t^\theta (ak^2 + dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right)}{b \left(\lambda \left(-\frac{t^\theta (ak^2 + dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right) + 2 \right)} - \frac{3ck^2 \lambda^4 \left(-\frac{t^\theta (ak^2 + dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right)^2}{2b \left(\lambda \left(-\frac{t^\theta (ak^2 + dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right) + 2 \right)^2} \quad (3.89)$$

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{13,5}(x, y, t) = -\frac{6ck^2}{b \left(-\frac{t^\theta (ak^2 + 4c\eta k^4 + dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right)^2} \quad (3.90)$$

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
B_0 &= -\frac{ck^2(2\eta + \lambda^2)}{b}, B_1 = -\frac{6ck^2\lambda}{b}, B_2 = -\frac{6ck^2}{b}, \\
m &= \frac{-ak^2 + ck^4(\lambda^2 - 4\eta) - dl^2}{Ak}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Küme 2:

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\eta \neq 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{14,1}(x, y, t) &= -\frac{ck^2(2\eta + \lambda^2)}{b} - \frac{12c\eta k^2\lambda}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\eta}(S_2)\right) - \lambda \right)} \\
&\quad - \frac{24c\eta^2 k^2}{b \left(-\sqrt{\lambda^2 - 4\eta} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\eta}(S_2)\right) - \lambda \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Burada, $S_2 = \frac{t^\theta(-ak^2 + ck^4(\lambda^2 - 4\eta) - dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta < 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{14,2}(x, y, t) &= -\frac{ck^2(2\eta + \lambda^2)}{b} - \frac{12c\eta k^2\lambda}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\eta - \lambda^2}(S_2)\right) - \lambda \right)} \\
&\quad - \frac{24c\eta^2 k^2}{b \left(\sqrt{4\eta - \lambda^2} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\eta - \lambda^2}(S_2)\right) - \lambda \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Burada, $S_2 = \frac{t^\theta(-ak^2 + ck^4(\lambda^2 - 4\eta) - dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta > 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{14,3}(x, y, t) &= -\frac{ck^2\lambda^2}{b} - \frac{6ck^2\lambda^2}{b \left(\sinh(\lambda(S_3)) + \cosh(\lambda(S_3)) - 1 \right)} \\
&\quad - \frac{6ck^2\lambda^2}{b \left(\sinh(\lambda(S_3)) + \cosh(\lambda(S_3)) - 1 \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.94}$$

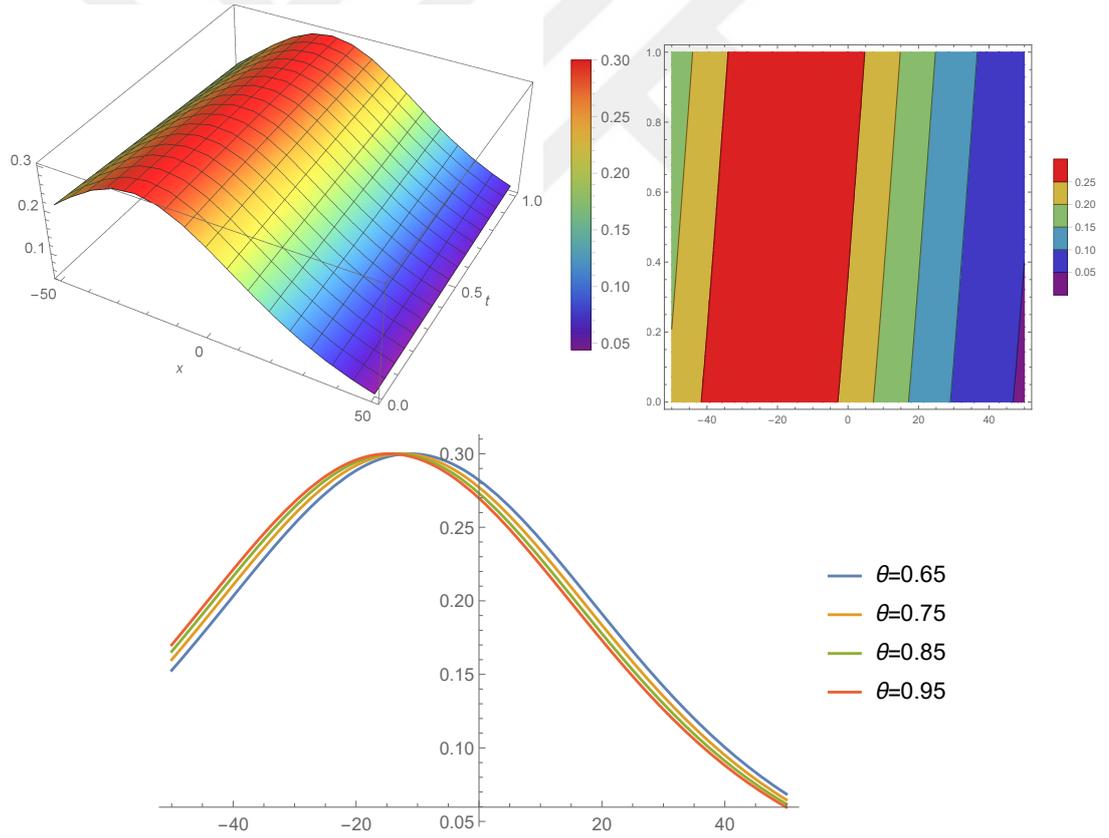
Burada, $S_3 = \frac{t^\theta(-ak^2 + c\lambda^2 k^4 - dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly$ şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ için,

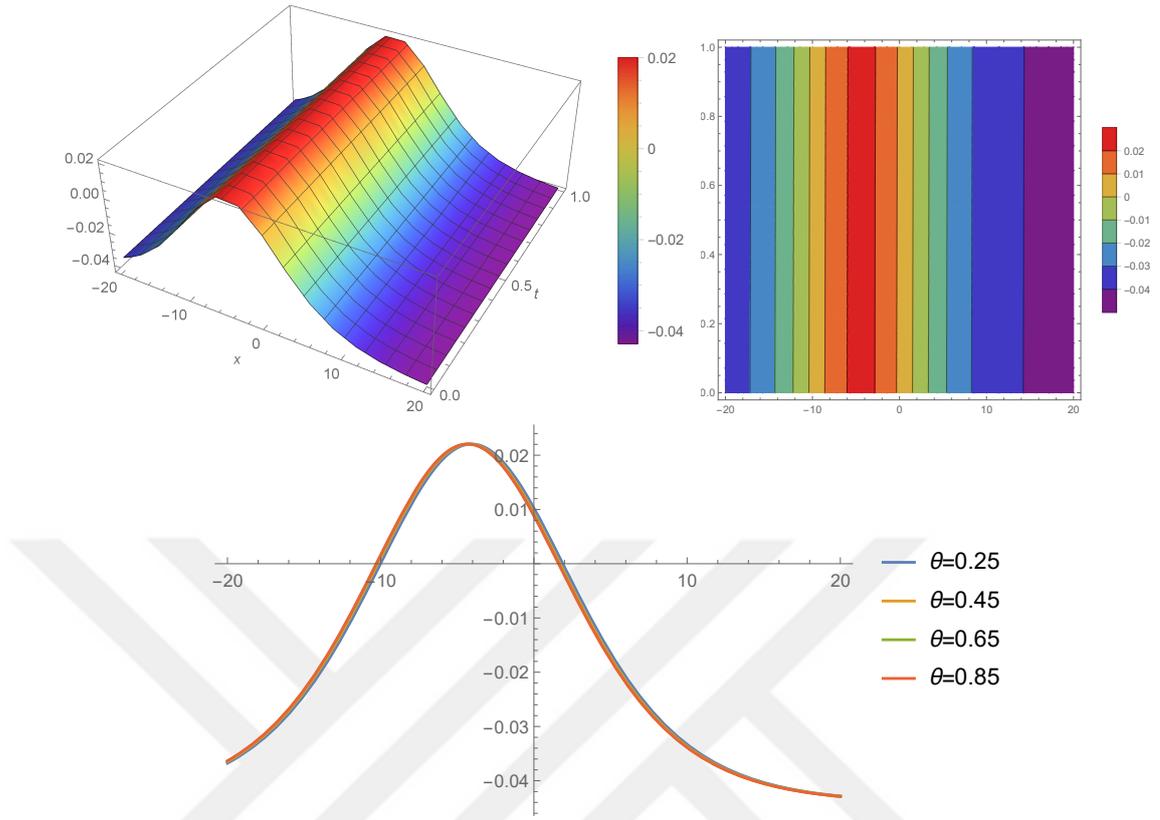
$$u_{14,4}(x, y, t) = -\frac{6c\eta k^2}{b} + \frac{3ck^2 \lambda^3 \left(\frac{t^\theta(-ak^2-dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right)}{b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta(-ak^2-dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right) + 2 \right)} - \frac{3ck^2 \lambda^4 \left(\frac{t^\theta(-ak^2-dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right)^2}{2b \left(\lambda \left(\frac{t^\theta(-ak^2-dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right) + 2 \right)^2} \quad (3.95)$$

$\lambda^2 - 4\eta = 0$, $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ için,

$$u_{14,5}(x, y, t) = \frac{4c\eta k^2}{b} - \frac{6ck^2}{b \left(\frac{t^\theta(-ak^2+4c\eta k^4-dl^2)}{A\theta k} + h + kx + ly \right)^2} \quad (3.96)$$



Şekil 3.7. (3.86) denkleminde elde edilen $u_{13.1}(x, y, t)$ nin $k = 0.2$, $c = 1$, $b = 0.01$, $y = 0.1$, $z = 0.5$, $h = 0.1$, $\eta = 0.05$, $\lambda = 0.5$, $d = 0.1$, $l = 0.5$, $a = 0.1$, $A = 0.1$, $\theta = 0.95$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği.



Şekil 3.8. (3.92) denkleminde elde edilen $u_{14.1}(x, y, t)$ nin $k = 0.99$, $c = 0.009$, $b = 0.01$, $y = 0.1$, $z = 0.5$, $h = 0.1$, $\eta = 0.05$, $\lambda = 0.5$, $d = 0.1$, $l = 0.5$, $a = 0.01$, $A = 0.1$, $\theta = 0.95$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği.

3.3.2. Değiştirilmiş Genişletilmiş tanh Fonksiyonu Yöntemi ile Analitik Çözüm

$N = 2$ değeri (2.18) denkleminde yerine yazılırsa, kesik seri aşağıdaki gibi olacaktır

$$u = A_0 + A_1\varphi(\xi) + B_1\varphi(\xi)^{-1} + A_2\varphi(\xi)^2 + B_2\varphi(\xi)^{-2} \quad (3.97)$$

Daha sonra, oluşan bu denklemden, $\varphi(\xi)^i$ fonksiyonları düzenlenir ve fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır. Bu durumda aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
0 &= ak^2 A_0 + dl^2 A_0 + AkmA_0 + bk^2 A_0^2 + 2ck^4 \sigma^2 A_2 + 2bk^2 A_1 B_1 + 2ck^4 B_2 \\
&\quad + 2bk^2 A_2 B_2, \\
0 &= bk^2 A_1^2 + ak^2 A_2 + dl^2 A_2 + AkmA_2 + 8ck^4 \sigma A_2 + 2bk^2 A_0 A_2, \\
0 &= ak^2 A_1 + dl^2 A_1 + AkmA_1 + 2ck^4 \sigma A_1 + 2bk^2 A_0 A_1 + 2bk^2 A_2 B_1, \\
0 &= bk^2 B_1^2 + ak^2 B_2 + dl^2 B_2 + AkmB_2 + 8ck^4 \sigma B_2 + 2bk^2 A_0 B_2, \\
0 &= ak^2 B_1 + dl^2 B_1 + AkmB_1 + 2ck^4 \sigma B_1 + 2bk^2 A_0 B_1 + 2bk^2 A_1 B_2, \\
0 &= 2ck^4 \sigma^2 B_1 + 2bk^2 B_1 B_2, \\
0 &= 6ck^4 \sigma^2 B_2 + bk^2 B_2^2, \\
0 &= 2ck^4 A_1 + 2bk^2 A_1 A_2, \\
0 &= 6ck^4 A_2 + bk^2 A_2^2.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Bu cebirsel denklem sistem çözüldüğünde A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 ve m değerleri için dört çözüm kümesi elde edilir.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\frac{12ck^2 \sigma}{b}, A_1 = 0, B_1 = 0, A_2 = -\frac{6ck^2}{b}, B_2 = -\frac{6ck^2 \sigma^2}{b}, \\
m &= \frac{-ak^2 + 16ck^4 \sigma - dl^2}{Ak}
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Küme 1:

$\sigma < 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{15,1}(x, y, t) &= -\frac{12ck^2 \sigma}{b} + \frac{6ck^2 \sigma \tanh \left(\sqrt{-\sigma} \left(\frac{t^\theta (-ak^2 + 16ck^4 \sigma - dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right) \right)^2}{b} \\
&\quad + \frac{6ck^2 \sigma \coth \left(\sqrt{-\sigma} \left(\frac{t^\theta (-ak^2 + 16ck^4 \sigma - dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right) \right)^2}{b}
\end{aligned} \tag{3.100}$$

veya

$$\begin{aligned}
u_{15,2}(x, y, t) &= -\frac{12ck^2 \sigma}{b} + \frac{6ck^2 \sigma \tanh \left(\sqrt{-\sigma} \left(\frac{t^\theta (-ak^2 + 16ck^4 \sigma - dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right) \right)^2}{b} \\
&\quad + \frac{6ck^2 \sigma \coth \left(\sqrt{-\sigma} \left(\frac{t^\theta (-ak^2 + 16ck^4 \sigma - dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right) \right)^2}{b}
\end{aligned} \tag{3.101}$$

$\sigma > 0$ için,

$$u_{15,3}(x, y, t) = -\frac{12ck^2\sigma}{b} - \frac{6ck^2\sigma \tan\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2+16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} - \frac{6ck^2\sigma \cot\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2+16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} \quad (3.102)$$

veya

$$u_{15,4}(x, y, t) = -\frac{12ck^2\sigma}{b} - \frac{6ck^2\sigma \tan\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2+16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} - \frac{6ck^2\sigma \cot\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2+16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} \quad (3.103)$$

$\sigma = 0$ için,

$$u_{15,5}(x, y, t) = -\frac{6ck^2}{b\left(\frac{t^\theta(-ak^2-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)^2} \quad (3.104)$$

Çözüm 2:

$$A_0 = -\frac{6ck^2\sigma}{b}, A_1 = 0, B_1 = 0, A_2 = -\frac{6ck^2}{b}, B_2 = 0, \\ m = \frac{-ak^2 + 4ck^4\sigma - dl^2}{Ak} \quad (3.105)$$

Küme 2:

$\sigma < 0$ için,

$$u_{16,1}(x, y, t) = -\frac{6ck^2\sigma}{b} + \frac{6ck^2\sigma \tanh\left(\sqrt{-\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2+4ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} \quad (3.106)$$

veya

$$u_{16,2}(x, y, t) = -\frac{6ck^2\sigma}{b} + \frac{6ck^2\sigma \coth\left(\sqrt{-\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2+4ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} \quad (3.107)$$

$\sigma > 0$ için,

$$u_{16,3}(x, y, t) = -\frac{6ck^2\sigma}{b} - \frac{6ck^2\sigma \tan\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2+4ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} \quad (3.108)$$

veya

$$v_{16,4}(x, y, t) = -\frac{6ck^2\sigma}{b} - \frac{6ck^2\sigma \cot \left(\sqrt{\sigma} \left(\frac{t^\theta(-ak^2+4ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right) \right)^2}{b} \quad (3.109)$$

$\sigma = 0$ için,

$$v_{16,5}(x, y, t) = -\frac{6ck^2}{b \left(\frac{t^\theta(-ak^2-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right)^2} \quad (3.110)$$

Çözüm 3:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{2ck^2\sigma}{b}, A_1 = 0, B_1 = 0, A_2 = -\frac{6ck^2}{b}, B_2 = 0, \\ m &= \frac{-ak^2 - 4ck^4\sigma - dl^2}{Ak} \end{aligned} \quad (3.111)$$

Küme 3:

$\sigma < 0$ için,

$$u_{17,1}(x, y, t) = -\frac{2ck^2\sigma}{b} + \frac{6ck^2\sigma \tanh \left(\sqrt{-\sigma} \left(\frac{t^\theta(-ak^2-4ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right) \right)^2}{b} \quad (3.112)$$

veya

$$u_{17,2}(x, y, t) = -\frac{2ck^2\sigma}{b} + \frac{6ck^2\sigma \coth \left(\sqrt{-\sigma} \left(\frac{t^\theta(-ak^2-4ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right) \right)^2}{b} \quad (3.113)$$

$\sigma > 0$ için,

$$u_{17,3}(x, y, t) = -\frac{2ck^2\sigma}{b} - \frac{6ck^2\sigma \tan \left(\sqrt{\sigma} \left(\frac{t^\theta(-ak^2-4ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right) \right)^2}{b} \quad (3.114)$$

veya

$$u_{17,4}(x, y, t) = -\frac{2ck^2\sigma}{b} - \frac{6ck^2\sigma \cot \left(\sqrt{\sigma} \left(\frac{t^\theta(-ak^2-4ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right) \right)^2}{b} \quad (3.115)$$

$\sigma = 0$ için,

$$u_{17,5}(x, y, t) = -\frac{6ck^2}{b \left(\frac{t^\theta(-ak^2-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right)^2} \quad (3.116)$$

Çözüm 4:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{4ck^2\sigma}{b}, A_1 = 0, B_1 = 0, A_2 = -\frac{6ck^2}{b}, B_2 = -\frac{6ck^2\sigma^2}{b}, \\
m &= \frac{-ak^2 - 16ck^4\sigma - dl^2}{Ak}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Küme 4: $\sigma < 0$ için,

$$\begin{aligned}
u_{18,1}(x, y, t) &= \frac{4ck^2\sigma}{b} + \frac{6ck^2\sigma \tanh\left(\sqrt{-\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2-16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)}{b} \\
&\quad + \frac{6ck^2\sigma \coth\left(\sqrt{-\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2-16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b}
\end{aligned} \tag{3.118}$$

veya

$$\begin{aligned}
u_{18,2}(x, y, t) &= \frac{4ck^2\sigma}{b} + \frac{6ck^2\sigma \tanh\left(\sqrt{-\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2-16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} \\
&\quad + \frac{6ck^2\sigma \coth^2\left(\sqrt{-\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2-16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b}
\end{aligned} \tag{3.119}$$

 $\sigma > 0$ için,

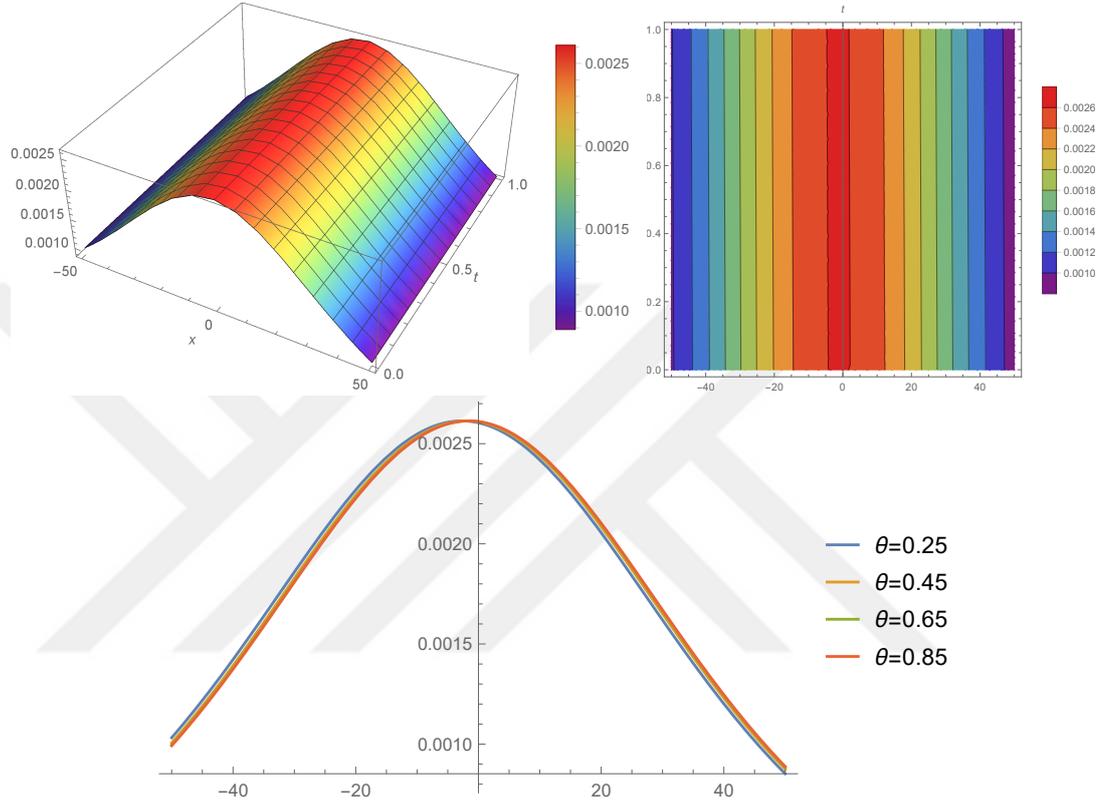
$$\begin{aligned}
u_{18,3}(x, y, t) &= \frac{4ck^2\sigma}{b} - \frac{6ck^2\sigma \tan\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2-16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} \\
&\quad - \frac{6ck^2\sigma \cot\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2-16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b}
\end{aligned} \tag{3.120}$$

veya

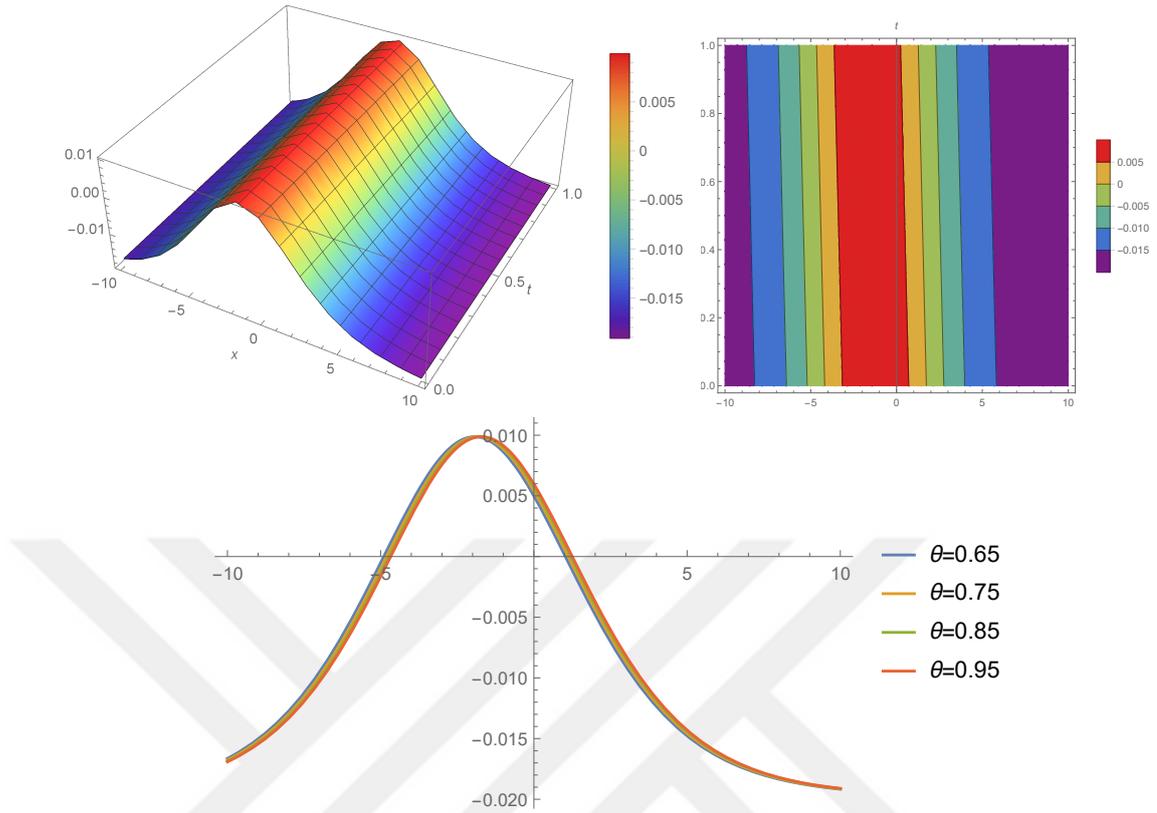
$$\begin{aligned}
u_{18,4}(x, y, t) &= \frac{4ck^2\sigma}{b} - \frac{6ck^2\sigma \tan\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2-16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b} \\
&\quad - \frac{6ck^2\sigma \cot\left(\sqrt{\sigma}\left(\frac{t^\theta(-ak^2-16ck^4\sigma-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly\right)\right)^2}{b}
\end{aligned} \tag{3.121}$$

$\sigma = 0$ için,

$$u_{18,5}(x, y, t) = -\frac{6ck^2}{b \left(\frac{t^\theta(-ak^2-dl^2)}{A\theta k} + kx + ly \right)^2} \quad (3.122)$$



Şekil 3.9. (3.106) denklemde elde edilen $u_{16,1}(x, y, t)$ nin $d = 0.05$, $y = 0.55$, $k = 0.202$, $b = 0.001$, $c = 0.0001$, $\sigma = -1.21$, $l = 0.45$, $a = 0.221$, $A = -1.01$, $\theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği.



Şekil 3.10. (3.112) denkleminde elde edilen $u_{17,1}(x, y, t)$ nin $d = 0.05$, $y = 0.55$, $k = 0.202$, $c = 0.0001$, $b = 0.001$, $\sigma = -1.21$, $l = 0.45$, $a = 0.221$, $A = -1.01$, $\theta = 0.98$ ve $t = 0.99$ değerleri için analitik çözüm grafiği.

3.3.3. Rezidual Kuvvet Serisi ile Nümerik Çözüm

İlk olarak, yukarıda elde ettiğimiz Değiştirilmiş Genişletilmiş tanh Fonksiyonu yöntemindeki analitik çözümlerden herhangi birine $t = 0$ uygulanarak bir başlangıç koşulu belirlenmelidir.

Buradan (3.106) denklemi için,

$$u_{16,1}(x, y, 0) = -\frac{6ck^2\sigma}{b} + \frac{6ck^2\sigma \tanh(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))^2}{b} \quad (3.123)$$

şeklindeki başlangıç koşulu elde edilir. Genişletilmiş (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan evrim,

$$AD_t^\theta u_x + au_{xx} + b(u)_{xx}^2 + cu_{xxxx} + du_{yy} = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 < \theta \leq 1 \quad (3.124)$$

denklemi için RKSİY çözümü (2.35) şeklindedir. Kesirli denklemin k -yüncü rezidual fonksiyonunun genel formu şu şekilde ifade edilebilir.

$$Resu_k = AD_t^\theta (u_k)_x + a(u_k)_{xx} + b(u_k)_{xx}^2 + c(u_k)_{xxxx} + d(u_k)_{yy} = 0 \quad (3.125)$$

Buradan, $u_k = u_k(x, y, t)$ olmak üzere, birinci RKSİY nümerik çözümü için $Resu_k$ ve $u_k(x, y, t)$ ifadelerine $k = 1$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
Resu_1 = & A(f_1)_x + a \left((f)_{xx} + \frac{t^\theta (f_1)_{xx}}{\theta} \right) + b \left(2 \left((f)_x + \frac{t^\theta (f_1)_x}{\theta} \right)^2 \right) \\
& + 2b \left((f) + \frac{t^\theta (f_1)}{\theta} \right) \left((f)_{xx} + \frac{t^\theta (f_1)_{xx}}{\theta} \right) \\
& + c \left((f)_{xxxx} + \frac{t^\theta (f_1)_{xxxx}}{\theta} \right) + d \left((f)_{yy} + \frac{t^\theta (f_1)_{yy}}{\theta} \right) \quad (3.126)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $f = f(x, y)$ ve $f_1 = f_1(x, y)$ dir. $t = 0$ ve (3.123) denklemi başlangıç şartı yerine yazılırsa $Resu_1 = 0$ eşitliğinden $f_1 = f_1(x, y)$ değeri şu şekilde elde edilir.

$$f_1 = \frac{12ck\sigma^2 (ak^2 - 4ck^4\sigma + dl^2) \tanh(\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))}{Ab\sqrt{-\sigma}} \quad (3.127)$$

Dolayısıyla $u_1 = u_1(x, y, t)$ şu şekilde olur,

$$\begin{aligned}
u_1 = & \frac{12ck\sigma^2 t^\theta (ak^2 - 4ck^4\sigma + dl^2) \tanh(\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))}{Ab\theta\sqrt{-\sigma}} \\
& + \frac{6ck^2\sigma \tanh^2(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))}{b} - \frac{6ck^2\sigma}{b} \quad (3.128)
\end{aligned}$$

Böylece birinci RKSİY nümerik çözümü elde edilmiş olur. Benzer şekilde $k = 2$ için $Resu_2$ şu şekilde olur,

$$\begin{aligned}
Resu_2 = & d \left((f)_{yy} + \frac{t^\theta (f_1)_{yy}}{\theta} + \frac{t^{2\theta} (f_2)_{yy}}{2\theta^2} \right) + At^{1-\theta} \left(t^{\theta-1} (f_1)_x + \frac{t^{2\theta-1} (f_2)_x}{\theta} \right) \\
& + a \left((f)_{xx} + \frac{t^\theta (f_1)_{xx}}{\theta} + \frac{t^{2\theta} (f_2)_{xx}}{2\theta^2} \right) + 2b \left((f)_x + \frac{t^\theta (f_1)_x}{\theta} + \frac{t^{2\theta} (f_2)_x}{2\theta^2} \right)^2 \\
& + 2b \left(\left((f) + \frac{t^\theta (f_1)}{\theta} + \frac{t^{2\theta} (f_2)}{2\theta^2} \right) \left((f)_{xx} + \frac{t^\theta (f_1)_{xx}}{\theta} + \frac{t^{2\theta} (f_2)_{xx}}{2\theta^2} \right) \right) \\
& + c \left((f)_{xxxx} + \frac{t^\theta (f_1)_{xxxx}}{\theta} + \frac{t^{2\theta} (f_2)_{xxxx}}{2\theta^2} \right) \quad (3.129)
\end{aligned}$$

Burada $f = f(x, y)$, $f_1 = f_1(x, y)$ ve $f_2 = f_2(x, y)$ dir. $t = 0$, (3.123) denklemi başlangıç şartı ve f_1 denklemde yerine yazılırsa $Resu_2 = 0$ eşitliğinden $f_2 = f_2(x, y)$ değeri şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
f_2 = & \frac{12c\sigma^2 (ak^2 - 4ck^4\sigma + dl^2)^2 (\cosh(2\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) - 2)}{A^2b} \\
& \times \operatorname{sech}^4(\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) \quad (3.130)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $u_2 = u_2(x, y, t)$ şu şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
u_2 = & -\frac{6ck^2\sigma}{b} + \frac{6ck^2\sigma \tanh^2(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))}{b} \\
& + \frac{12ck\sigma^2 t^\theta (ak^2 - 4ck^4\sigma + dl^2) \tanh(\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))}{Ab\theta\sqrt{-\sigma}} \\
& + \frac{6c\sigma^2 t^{2\theta} (ak^2 - 4ck^4\sigma + dl^2)^2 (\cosh(2\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) - 2)}{A^2b\theta^2} \\
& \times \operatorname{sech}^4(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Bu ise ikinci RKSİY nümerik değeridir. Benzer şekilde uygulamaya devam edilirse $k = 3$ için $f_3 = f_3(x, y, t)$ ve $u_3 = u_3(x, y, t)$ değerleri,

$$\begin{aligned}
f_3 = & -\frac{24c\sigma^3 (ak^2 - 4ck^4\sigma + dl^2)^3 (\cosh(2\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) - 5)}{A^3bk\sqrt{-\sigma}} \\
& \times \tanh(\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) \operatorname{sech}^4(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))
\end{aligned} \tag{3.132}$$

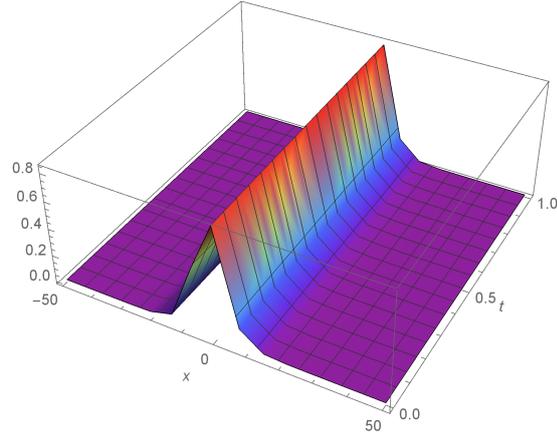
$$\begin{aligned}
u_3 = & -\frac{6ck^2\sigma}{b} + \frac{6ck^2\sigma \tanh^2(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))}{b} \\
& + \frac{12ck\sigma^2 t^\theta (ak^2 - 4ck^4\sigma + dl^2) \tanh(\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))}{Ab\theta\sqrt{-\sigma}} \\
& + \frac{6c\sigma^2 t^{2\theta} (ak^2 - 4ck^4\sigma + dl^2)^2 (\cosh(2\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) - 2)}{A^2b\theta^2} \\
& \times \operatorname{sech}^4(\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) \\
& - \frac{4c\sigma^3 t^{3\theta} (ak^2 - 4ck^4\sigma + dl^2)^3 (\cosh(2\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) - 5)}{A^3b\theta^3k\sqrt{-\sigma}} \\
& \times \tanh(\sqrt{-\sigma}(kx + ly)) \operatorname{sech}^4(\sqrt{-\sigma}(kx + ly))
\end{aligned} \tag{3.133}$$

şeklinde elde edilir. Böylece üçüncü RKSİY nümerik değerleri elde edilmiş olur.

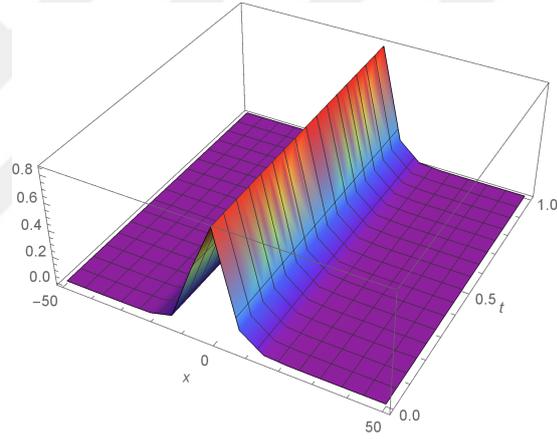
Aşağıda (2+1)-boyutlu DOED'nin RKSİY ile elde edilen nümerik çözümleri, analitik çözümlerle karşılaştırılacaktır. Bu nümerik çözümleri bulmak için Wolfram Mathematica uygulaması kullanılmıştır. Tablo 3.1, θ nın farklı değerleri için RKSİY ile elde edilen $u_3 = u_3(x, y, t)$ nümerik çözümünün analitik çözümle karşılaştırılması ile elde edilen mutlak hatalar verilmiştir.

Tablo 3.1. Farklı θ değerleri için (3.133) denkleminin nümerik çözümü, analitik çözümü ve bu iki çözümün karşılaştırılması sonucunda oluşan mutlak hatanın değerleri tablosu

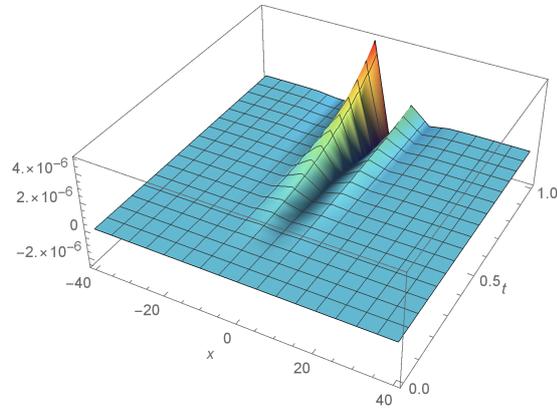
t	$\theta = 0.75$			$\theta = 0.85$			$\theta = 0.95$		
	$u_3(x, y, t)$	Analitik Çözüm	Mutlak Hata	$u_3(x, y, t)$	Analitik Çözüm	Mutlak Hata	$u_3(x, y, t)$	Analitik Çözüm	Mutlak Hata
0.0	0.575491	0.575491	0.00000	0.575491	0.575491	0.00000	0.575491	0.575491	0.00000
0.1	0.583687	0.583687	5.29179×10^{-9}	0.581233	0.581233	1.27760×10^{-9}	0.579571	0.579571	3.26079×10^{-10}
0.2	0.589284	0.589284	4.22828×10^{-8}	0.585848	0.585848	1.34733×10^{-8}	0.583378	0.583378	4.53833×10^{-9}
0.3	0.594195	0.594195	1.42543×10^{-7}	0.590117	0.590117	5.34286×10^{-8}	0.587089	0.587089	2.11688×10^{-8}
0.4	0.598709	0.598709	3.37514×10^{-7}	0.594176	0.594176	1.41958×10^{-7}	0.590740	0.590740	6.31116×10^{-8}
0.5	0.602949	0.602948	6.58507×10^{-7}	0.598087	0.598086	3.02863×10^{-7}	0.594348	0.594348	1.47233×10^{-7}
0.6	0.606981	0.606980	1.13671×10^{-6}	0.601883	0.601882	5.62409×10^{-7}	0.597921	0.597921	2.94118×10^{-7}
0.7	0.610850	0.610848	1.80317×10^{-6}	0.605586	0.605585	9.48980×10^{-7}	0.601467	0.601466	5.27882×10^{-7}
0.8	0.614582	0.614579	2.68881×10^{-6}	0.609212	0.609210	1.49283×10^{-6}	0.604988	0.604987	8.76021×10^{-7}
0.9	0.618200	0.618196	3.82442×10^{-6}	0.612770	0.612768	2.22590×10^{-6}	0.608488	0.608487	1.36928×10^{-6}
1.0	0.621718	0.621712	5.24064×10^{-6}	0.616270	0.616267	3.18163×10^{-6}	0.611970	0.611967	2.04154×10^{-6}



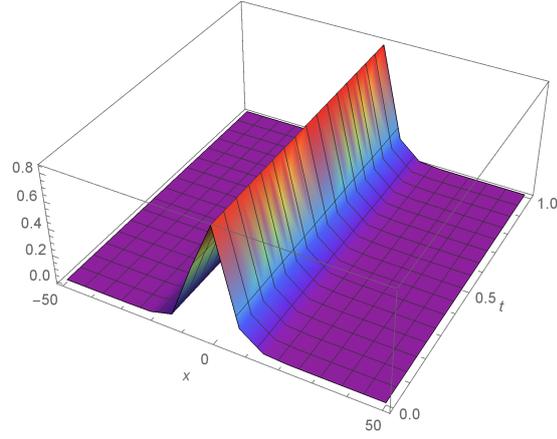
Şekil 3.11. (3.133) denkleminde elde edilen $u_3(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.75$ değerleri için nümerik çözüm grafiği.



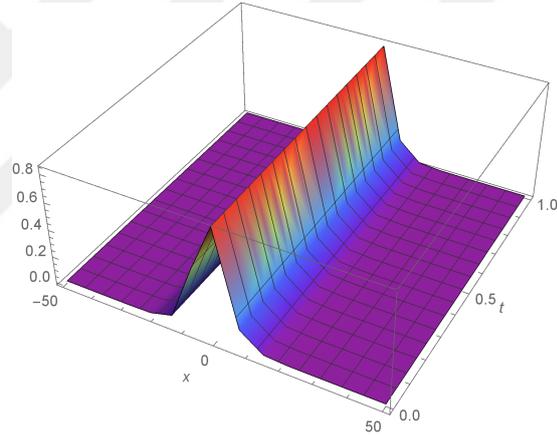
Şekil 3.12. (3.106) denkleminde elde edilen $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.75$ değerleri için analitik çözüm grafiği.



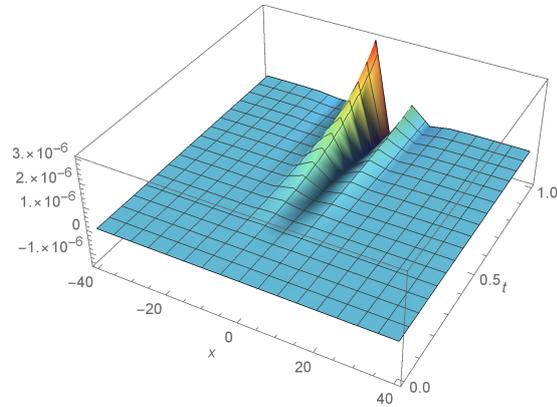
Şekil 3.13. (3.133) ve (3.106) denklemlerinde elde edilen $u_3(x, y, t)$ ve $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $y = 1$, $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.75$ değerlerine göre mutlak hata grafiği.



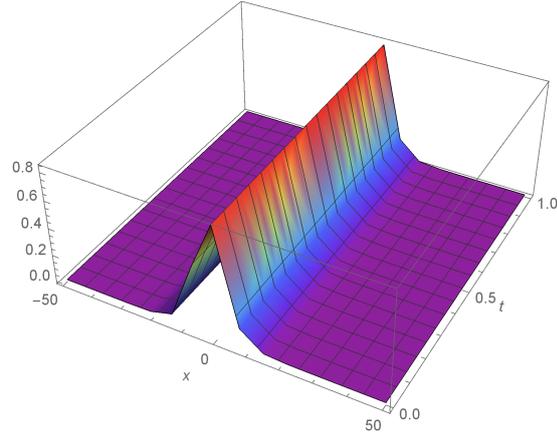
Şekil 3.14. (3.133) denkleminde elde edilen $u_3(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.85$ değerleri için nümerik çözüm grafiği.



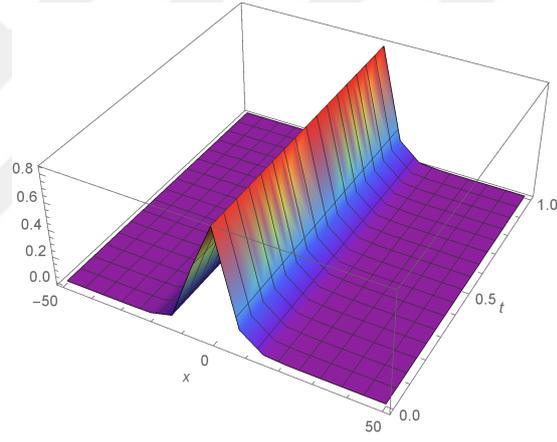
Şekil 3.15. (3.106) denkleminde elde edilen $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.85$ değerleri için analitik çözüm grafiği.



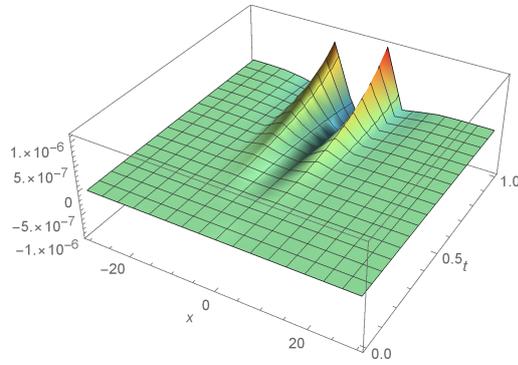
Şekil 3.16. (3.133) ve (3.106) denklemlerinde elde edilen $u_3(x, y, t)$ ve $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $y = 1$, $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.85$ değerlerine göre mutlak hata grafiği.



Şekil 3.17. (3.133) denkleminde elde edilen $u_3(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.95$ değerleri için nümerik çözüm grafiği.



Şekil 3.18. (3.106) denkleminde elde edilen $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $y = 1$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.95$ değerleri için analitik çözüm grafiği.



Şekil 3.19. (3.133) ve (3.106) denklemlerinde elde edilen $u_3(x, y, t)$ ve $u_{16,1}(x, y, t)$ 'in $y = 1$, $c = 0.99$, $k = 0.22$, $b = 0.2$, $\sigma = -0.64$, $l = 0.45$, $a = 0.05$, $d = 0.006$, $A = 0.71$, $x = 2$ ve $\theta = 0.95$ değerlerine göre mutlak hata grafiği.

4. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında ilk olarak yeni geliştirilmiş (3+1)-boyutlu Boussinesq tipi integrallenebilir dalga denklemi için analitik çözüm yöntemleri olan Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı ve Değiştirilmiş Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemleri uygulamaları, (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan Boussinesq denklemi için analitik çözüm yöntemleri olan Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı yöntemi uygulamaları ve genişletilmiş (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan evrim denklemi için analitik çözüm yöntemi olan Genişletilmiş Üstel $(-\varphi(\xi))$ -açılımı, Değiştirilmiş Genişletilmiş Tanh fonksiyonu ve nümerik çözüm yöntemi olan Rezidual Kuvvet Serisi yöntemlerinin uygulamaları verilmiştir. Daha sonra elde edilen bazı çözümlerin uygun değerleri kullanılarak 3D, kontur ve 2D grafikleri oluşturulmuştur. Elde edilen analitik bulgular ve grafiksel gösterimler, bu yöntemlerin doğru ve güvenilir olduğunu açıkça ortaya koymaktadır. Ayrıca, bu çalışmada elde edilen çözümler literatürde benzersizdir ve daha önce yayınlanmamıştır. Bu analitik çözümler, incelenen modellerin fiziksel aktivitelerini yorumlamak ve gerçek dünya problemlerinde nasıl kullanılabileceğini anlamak açısından büyük önem taşımaktadır.

Genişletilmiş (2+1)-boyutlu doğrusal olmayan evrim denklemi için değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyonu yöntemi uygulanarak, literatürde bulunmayan dalga çözümleri elde edilmiştir. Denklem için iki çözüm kümesi halinde analitik çözümler elde edilmiştir. Daha sonra Rezidual Kuvvet Serisi yöntemi (RKSYS) kullanılarak, denklemin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Önerilen yöntemlerin geçerliliği ve etkinliğini göstermek amacıyla, grafiksel gösterimler ve bir tablo sunulmuştur. Bu görsel ve tablolar, yöntemlerin teorik sonuçlarını deneysel verilerle karşılaştırarak doğrulamayı amaçlamaktadır. Bu şekilde, yöntemlerin gerçek dünya problemlerinde ne kadar etkili olduğu daha açık bir şekilde anlaşılmıştır.

Uygulanan yöntemlerin güçlü ve etkili olduğu gösterilmiş ve çeşitli doğrusal olmayan karmaşık modellerin fiziksel özelliklerini açıklamada önemli bir rol oynayabilecekleri ortaya konmuştur. Bu nedenle, bu yöntemler gelecekte diğer kesirli doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için de kullanılabilecektir. Bu çalışma, gelecekteki araştırmacılar ve uygulayıcılar için bu yöntemlerin faydalı ve etkili bir araç olduğunu göstermektedir.

KAYNAKÇA

1. Archibald, T., Fraser, C., Grattan-Guinness, I., “The history of differential equations, 1670–1950”, *Jornades a Oberwolfach, del*, 31, 2004.
2. Çağlıyan, M., Çelebi, O., Kısmi diferensiyel denklemler, Dora Yayınları, 2010.
3. Bleecker, D., Basic partial differential equations, Chapman and Hall/CRC, 2018.
4. Farlow, S. J., Partial differential equations for scientists and engineers, Courier Corporation, 1993.
5. Rauch, J., Partial differential equations, volume 128, Springer Science & Business Media, 2012.
6. Renardy, M., Rogers, R. C., An introduction to partial differential equations, volume 13, Springer Science & Business Media, 2004.
7. Logan, J. D., An introduction to nonlinear partial differential equations, volume 89, John Wiley & Sons, 2008.
8. Wazwaz, A.-M., Partial differential equations, CRC Press, 2002.
9. Wang, M., Li, X., Zhang, J., “The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics”, *Physics Letters A*, 372 (4), 417–423, 2008.
10. Ebadi, G., Biswas, A., “The (G'/G) method and topological soliton solution of the K(m, n) equation”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16 (6), 2377–2382, 2011.
11. Shaikh, T. S., Baber, M. Z., Ahmed, N., Iqbal, M. S., Akgül, A., El Din, S. M., “Investigation of solitary wave structures for the stochastic Nizhnik–Novikov–Veselov (SNNV) system”, *Results in Physics*, 48, 106389, 2023.
12. Fan, E., “Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations”, *Physics Letters A*, 277 (4-5), 212–218, 2000.
13. Şenol, M., Gençyiğit, M., Koksal, M. E., Qureshi, S., “New analytical and numerical solutions to the $(2+ 1)$ -dimensional conformable cpKP–BKP equation arising in fluid dynamics, plasma physics, and nonlinear optics”, *Optical and Quantum Electronics*, 56 (3), 352, 2024.

14. Shakeel, M., Attaullah, Shah, N. A., Chung, J. D., “Modified exp-function method to find exact solutions of microtubules nonlinear dynamics models”, *Symmetry*, 15 (2), 360, 2023.
15. He, J.-H., Wu, X.-H., “Exp-function method for nonlinear wave equations”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 30 (3), 700–708, 2006.
16. Akbar, M. A., Ali, N. H. M., “Exp-function method for Duffing equation and new solutions of (2+ 1) dimensional dispersive long wave equations”, *Prog Appl Math*, 1 (2), 30–42, 2011.
17. Bekir, A., Boz, A., “Exact solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method”, *Physics Letters A*, 372 (10), 1619–1625, 2008.
18. Baskonus, H. M., Bulut, H., “Analytical studies on the (1+ 1)-dimensional nonlinear dispersive modified Benjamin–Bona–Mahony equation defined by seismic sea waves”, *Waves in Random and Complex Media*, 25 (4), 576–586, 2015.
19. Ozisik, M., Secer, A., Bayram, M., “On solitary wave solutions for the extended nonlinear Schrödinger equation via the modified F-expansion method”, *Optical and Quantum Electronics*, 55 (3), 215, 2023.
20. Borg, M., Badra, N. M., Ahmed, H. M., Rabie, W. B., “Solitons behavior of Sasa-Satsuma equation in birefringent fibers with Kerr law nonlinearity using extended F-expansion method”, *Ain Shams Engineering Journal*, 15 (1), 102290, 2024.
21. Kudryashov, N. A., “One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17 (6), 2248–2253, 2012.
22. Şenol, M., Akinyemi, L., Nkansah, H., Adel, W., “New solutions for four novel generalized nonlinear fractional fifth-order equations”, *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2022.
23. Artin, E., *The gamma function*, Courier Dover Publications, 2015.
24. Seiberg, N., “Supersymmetry and non-perturbative beta functions”, *Physics Letters B*, 206 (1), 75–80, 1988.
25. Hilfer, R., Luchko, Y., Tomovski, Z., “Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives”, *Fract. Calc. Appl. Anal*, 12 (3), 299–318, 2009.

26. Jumarie, G., “Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results”, *Computers & Mathematics with Applications*, 51 (9-10), 1367–1376, 2006.
27. Almeida, R., “A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 44, 460–481, 2017.
28. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., “A new definition of fractional derivative”, *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65–70, 2014.
29. Mirzazadeh, M., Akinyemi, L., Şenol, M., Hosseini, K., “A variety of solitons to the sixth-order dispersive (3+ 1)-dimensional nonlinear time-fractional Schrödinger equation with cubic-quintic-septic nonlinearities”, *Optik*, 241, 166318, 2021.
30. Bektaş, A., “Lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri”, Master’s thesis, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2022.
31. Akbar, M. A., Ali, N. H. M., “Solitary wave solutions of the fourth order Boussinesq equation through the $\exp(-\phi(\eta))$ -expansion method”, *SpringerPlus*, 3, 1–6, 2014.
32. Islam, M. R., “Application of $\exp(\phi(\xi))$ -expansion method for Tzitzeica type nonlinear evolution equations”, *Journal for Foundations and Applications of Physics*, 4 (1), 8–18, 2016.
33. Kadkhoda, N., Jafari, H., “Analytical solutions of the Gerdjikov–Ivanov equation by using $\exp(-\phi(\eta))$ -expansion method”, *Optik*, 139, 72–76, 2017.
34. Zahran, E. H., Khater, M. M., “Modified extended tanh-function method and its applications to the Bogoyavlenskii equation”, *Applied Mathematical Modelling*, 40 (3), 1769–1775, 2016.
35. Raslan, K. R., Ali, K. K., Shallal, M. A., “The modified extended tanh method with the Riccati equation for solving the space-time fractional EW and MEW equations”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 103, 404–409, 2017.
36. Alam, L. M. B., Jiang, X., “Exact and explicit traveling wave solution to the time-fractional phi-four and (2+ 1) dimensional CBS equations using the modified extended tanh-function method in mathematical physics”, *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 4, 100039, 2021.

37. Liu, F., Feng, Y., “The modified generalized Kudryashov method for nonlinear space–time fractional partial differential equations of Schrödinger type”, *Results in Physics*, 53, 106914, 2023.
38. Şenol, M., Gençyiğit, M., Ntiamoah, D., Akinyemi, L., “New (3+ 1)-dimensional conformable KdV equation and its analytical and numerical solutions”, *International Journal of Modern Physics B*, 38 (04), 2450056, 2024.
39. Wazwaz, A.-M., Alhejaili, W., El-Tantawy, S., “Analytical study on two new (3+ 1)-dimensional Painlevé integrable equations: Kink, lump, and multiple soliton solutions in fluid mediums”, *Physics of Fluids*, 35 (9), 2023.
40. Boussinesq, J., “Théorie de l’intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire”, *CR Acad. Sci. Paris*, 72 (755-759), 1871, 1871.
41. Akinyemi, L., “Shallow ocean soliton and localized waves in extended (2+ 1)-dimensional nonlinear evolution equations”, *Physics Letters A*, 463, 128668, 2023.